Журнал математической физики, анализа, геометрии
2005, т. 1, № 2, с. 155–181

Допустимые преобразования мер

С.С. Габриелян

Харьковский национальный технический университет "ХПИ"
ул. Фрунзе, 21, Харьков, 61002, Украина
E-mail:gabrss@kpi.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 2 сентября 2004 г.

Пусть топологическая полугруппа G действует на топологическом пространстве X. Элемент $g \in G$ называется допустимым преобразованием (частично допустимым, сингулярным, эквивалентным, инвариантным) для меры μ относительно меры ν, если $\mu_g \ll \nu$ (соответственно: $\mu_g \not\perp \nu$, $\mu_g \perp \nu$, $\mu_g \sim \nu$, $\mu_g = c \cdot \nu$), где $\mu_g(E) := \mu(g^{-1}E)$. Их множество обозначим через $A(\mu|\nu)$ (соответственно: $AP(\mu|\nu)$, $S(\mu|\nu)$, $E(\mu|\nu)$, $I(\mu|\nu)$). Рассмотрены, в частности, алгебраические и теоретико-множественные свойства, разложения типа Лебега. Если $G = X$ — локально-компактная группа, то получена информация о "размере" $A(\mu)$.

Нехай топологічна півгрупа G діє на топологічному просторі X. Елемент $g \in G$ називаєьтся припустимим перетворенням (частково припустимим, сингулярним, еквівалентним, інваріантним) для міри μ відносно міри ν, якщо $\mu_g \ll \nu$ (відповідно: $\mu_g \not\perp \nu$, $\mu_g \perp \nu$, $\mu_g \sim \nu$, $\mu_g = c \cdot \nu$), де $\mu_g(E) := \mu(g^{-1}E)$. Їх множину позначимо через $A(\mu|\nu)$ (відповідно: $AP(\mu|\nu)$, $S(\mu|\nu)$, $E(\mu|\nu)$, $I(\mu|\nu)$). Розглянуто, зокрема, алгебраїчні та теоретико-множинні властивості, розкладання типу Лебега. Якщо $G = X$ — локально-компактна група, то отримано інформацію про "розмір" $A(\mu)$.

Mathematics Subject Classification 2000: 28C99, 37A99.

Key words: топологическое G-пространство, мера, допустимое преобразование, разложение типа Лебега.

1. Введение

При изучении свойств мер важную роль играют те преобразования пространства X, которые переводят данную меру в меру, абсолютно непрерывную исходной. Такие преобразования называются допустимыми. Если пространство X является топологической группой, то простейшими ее преобразованиями являются сдвиги. Если сдвиг данной меры μ на $g \in X$ абсолютно непрерывен относительно μ, то элемент g называется допустимым. Обозначим через

$A(\mu)$ множество допустимых сдвигов меры μ. Допустимые сдвиги естественно возникают, например, в теории случайных процессов. Общее определение допустимого сдвига и простейшие свойства $A(\mu)$ для мер, соответствующих случайным процессам, имеются в работе T.S. Pitcher [9]. Некоторые алгебраические и топологические свойства множества таких элементов в случае гильбертова пространства подробно исследованы в монографии А.В. Скорохода [3, гл. 4], а в случае сепарабельной метрической группы — в статье Y. Okazaki [8].

Оказалось, что от "объема" $A(\mu)$ существенно зависит структура самой меры μ. Так, А.В. Скороход [2] доказал, что если $X = \mathbb{R}$ и $[0;\infty) \subset A(\mu)$, то μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а ее носитель имеет вид $[a;\infty)$. Этот результат был обобщен на случай локально-компактной σ-компактной группы P.L. Brockett [5]. Кроме того, известная теорема Макки–Вейля [7] утверждает что, если X — стандартная борелевская группа и $A(\mu) = X$, то X допускает локально-компактную топологию и μ взаимно абсолютно непрерывна с мерой Хаара.

Эти результаты дают основания для более детального изучения множества $A(\mu)$ и аналогичных ему множеств и зависимости от них структуры самой меры μ, чему и посвящена данная работа.

2. Предварительные сведения и основные определения

Под борелевским пространством мы будем понимать пространство X с выделенной σ-алгеброй его подмножеств $\mathcal{B}$ (которые называются борелевскими) и обозначать через $(X, \mathcal{B})$. Не ограничивая общности будем считать, что пространство X отделимое, т.е.: если $x, y \in X$ и $x \neq y$, то существует $E \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in E \not\ni y$.

Определение 2.1. *Пара (G, X) называется (полу)группой преобразований, если:*

1) G — (полу)группа, а X — борелевское пространство.

2) Отображение $g : (X, \mathcal{B}) \to (X, \mathcal{B})$, $x \mapsto g \cdot x$ борелевское и такое, что $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$, и если e — единица в G, то $e \cdot x = x$, $\forall g,\ h \in G$, $\forall x \in X$.

Пусть G — топологическая (полу)группа, а X — топологическое пространство. Тогда (полу)группа преобразований (G, X) называется топологической, если отображение $(g, x) \mapsto g \cdot x$ непрерывно.

Определение 2.2. *Морфизмом из (G, X) в (H, Y) называется пара (p, τ), где $p : G \to H$ — гомоморфизм, а $\tau : X \to Y$ — борелевское отображение, удовлетворяющее условию согласованности:*

$$\tau(g \cdot x) = p(g) \cdot \tau(x)\ , \quad \forall g \in G,\ \forall x \in X. \tag{2.1}$$

Если (G, X) и (H, Y) — топологические (полу)группы преобразований, то p и τ предполагаются непрерывными.

Тем самым множество [топологических] (полу)групп преобразований образуют категорию.

В дальнейшем будем обозначать образ множества E через $g\cdot E$, а прообраз — через $g^{-1}E$. Если G — группа, то $g\cdot E$ будем обозначать просто gE.

Пусть $M(X)$ — множество всех конечных мер на X, определенных на $\mathcal{B}$. Множество неотрицательных конечных мер обозначим через $M^+(X)$. Меру $\mu \in M^+(X)$ назовем вероятностной или распределением, если $\mu(X) = 1$. Вероятностную меру, сосредоточенную в точке x, обозначим через δ_x. Для $\mu, \nu \in M(X)$ мы пишем $\mu \ll \nu$ (соответственно $\mu \perp \nu$), когда μ абсолютно непрерывна (сингулярна) относительно ν. Взаимную абсолютную непрерывность (эквивалентность) μ и ν обозначим через $\mu \sim \nu$. Если $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где $\mu_1 \perp \mu_2$, то μ_1 и μ_2 назовем частями меры μ. Замкнутое подпространство $N \subset M(X)$ называется *L-подпространством*, если $L^1(\mu) \subset N$ для любой меры $\mu \in N$. Пусть $X = G$ — группа, положим $\overset{\vee}{\mu}(E) := \mu(E^{-1})$. Если X — топологическое пространство, то носитель меры μ обозначим через $supp\mu$.

Пусть $\mu \in M(X)$. Через μ_g, $g \in G$, обозначим меру на $(X, \mathcal{B})$, определенную соотношением:

$$\mu_g(E) = \mu(g^{-1}E), E \in \mathcal{B}.$$

Тогда $(\mu_g)_h(E) = \mu_g(h^{-1}E) = \mu(g^{-1}h^{-1}E) = \mu_{hg}(E)$, т.е.

$$(\mu_g)_h = \mu_{hg}. \tag{2.2}$$

Пусть $\{(G_i, X_i)\}$ — конечное или счетное семейство (полу)групп преобразований и μ_i меры на X_i. Обозначим через G_0, X_0, $\mathcal{B}_0$ и μ их прямые произведения. Тогда (полу)группа G_0 действует на X_0 следующим образом:

$$g\cdot x = (g_1\cdot x_1, g_2\cdot x_2, \dots), \text{ где } g = (g_1, g_2, \dots) \in G_0, x = (x_1, x_2, \dots) \in X_0, \tag{2.3}$$

при этом действие является непрерывным, если все G_i действуют непрерывно на X_i. Так как мера μ однозначно определяется на цилиндрических множествах и при $E = E_1 \times E_2 \times \dots$ имеем $g^{-1}E = g_1^{-1}E_1 \times g_2^{-1}E_2 \times \dots$, то

$$\mu_g = (\mu_1)_{g_1} \times (\mu_2)_{g_2} \times \dots, \text{ где } g = (g_1, g_2, \dots). \tag{2.4}$$

Пусть $(G_i, \mathcal{B}_{G_i}, p_{ij})$ — проективная система (полу)групп и $(G, \mathcal{B}_G)$ — ее проективный предел. Пусть $(X_i, \mathcal{B}_i, \tau_{ij})$ — проективная система борелевских пространств, на которых действуют G_i, и $(X, \mathcal{B})$ — ее проективный предел. Для того чтобы можно было определить действие G на X следующим образом (как в (2.3))

$$g\cdot x = (g_1\cdot x_1, g_2\cdot x_2, \dots), \text{ где } g = (g_1, g_2, \dots) \in G, x = (x_1, x_2, \dots) \in X, \tag{2.5}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие согласованности

$$\tau_{ij}(g_j \cdot x_j) = p_{ij}(g_j) \cdot \tau_{ij}(x_j), \quad i < j. \tag{2.6}$$

Тогда G действует непрерывно, если все отображения p_{ij}, τ_{ij} — непрерывные. Полугруппа преобразований (G, X) с действием (2.5) называется проективным пределом проективной системы (G_i, X_i).

Пусть $\mu, \nu \in M(X)$. Тогда их можно представить в виде

$$\mu = \mu^1 + \mu^2, \nu = \nu^1 + \nu^2, \text{ где } \mu^1 \sim \nu^1, \mu^2 \perp \nu, \nu^2 \perp \mu$$

— разложение Лебега мер μ и ν относительно друг друга. Через $\frac{d\mu}{d\nu}$ будем обозначать производную меры μ относительно ν. Тогда

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{d\mu^1}{d\nu^1}, \ \nu^1 - \text{п.в.} \ ; \quad \text{и} \quad \frac{d\mu}{d\nu} = 0, \ (\nu^2 + \mu^2) - \text{п.в.}$$

Через m_G обозначим левую меру Хаара локально-компактной группы G.

Пусть $E \in \mathcal{B}$, тогда, в силу конечности меры, на некоторой последовательности $\{g_i\}_{i=1}^N$ достигается супремум

$$\sup\{|\mu|(\sum_{i=1}^{N} g_i^{-1}E), \ N \leq \infty, g_i \in G\}.$$

Множество $\widetilde{E} = \cup_{i=1}^N g_i^{-1}E$ называется *множеством μ-максимальной меры, порожденным множеством E относительно действия (полу)группы G.* Множество максимальной меры относительно действия полугруппы будем называть просто множеством μ-максимальной меры, а совокупность таких множеств обозначим через $\mathcal{F}$. Ясно, что $\widetilde{E}$ определено неоднозначно. Однако, если $\widetilde{E}_1$ и $\widetilde{E}_2$ порождены E, то, очевидно, $\mu|_{\widetilde{E}_1} = \mu|_{\widetilde{E}_2}$.

В следующих определениях установлены множества, изучению которых посвящена данная работа.

Определение 2.3. *Элемент $g \in G$ называется допустимым преобразованием (частично допустимым, сингулярным, эквивалентным, инвариантным) для меры μ, если $\mu_g \ll \mu$ (соответственно: $\mu_g \not\perp \mu$, $\mu_g \perp \mu$, $\mu_g \sim \mu, \mu_g = \mu$). Их множество обозначим через $A(\mu)$ (соответственно: $AP(\mu)$, $S(\mu)$, $E(\mu)$, $I(\mu)$).*

Очевидно, что

$$I(\mu) \subset E(\mu) \subset A(\mu) \subset AP(\mu), AP(\mu) \cap S(\mu) = \emptyset, AP(\mu) \cup S(\mu) = G. \tag{2.7}$$

Ясно, что если G имеет единичный элемент e, то $e \in I(\mu)$.
Следующее определение является естественным обобщением предыдущего.

Определение 2.4. *Элемент $g \in G$ называется допустимым преобразованием (частично допустимым, сингулярным, эквивалентным, инвариантным) для меры μ относительно меры ν, если $\mu_g \ll \nu$ (соответственно: $\mu_g \not\perp \nu$, $\mu_g \perp \nu$, $\mu_g \sim \nu$, $\mu_g = c \cdot \nu$). Их множество обозначим через $A(\mu|\nu)$ (соответственно: $AP(\mu|\nu)$, $S(\mu|\nu)$, $E(\mu|\nu)$, $I(\mu|\nu)$).*

Множества из определения 2.3 являются частными случаями вышеопределенных множеств при $\mu = \nu$. Очевидно, что для этих множеств также выполнены соответствующие включения:

$$\begin{aligned} &I(\mu|\nu) \subset E(\mu|\nu) \subset A(\mu|\nu) \subset AP(\mu|\nu), \\ &AP(\mu|\nu) \cap S(\mu|\nu) = \emptyset, \\ &AP(\mu|\nu) \cup S(\mu|\nu) = G. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ясно, что если G — группа, то $E(\mu|\nu) = E(|\mu|||\nu|)$, $A(\mu|\nu) = A(|\mu|||\nu|)$, $AP(\mu|\nu) = AP(|\mu|||\nu|)$, $S(\mu|\nu) = S(|\mu|||\nu|)$. Поэтому при изучении этих множеств мы часто будем ограничиваться распределениями.

Естественно выделить "патологические" преобразования.

Определение 2.5. *Пусть $Z(g) = \{x :\ g \cdot x = x\}$. Положим*

$$I_0(\mu) = \{g :\ |\mu|(Z(g)) = \|\mu\|\}.$$

Особый интерес представляет случай, когда $X = G$ — группа. Тогда естественно определены операторы

$$L_g(x) = gx\,, \quad R_g(x) = xg^{-1}\,, \quad C_g(x) = gxg^{-1} = L_g R_g(x), \quad \forall x, g \in X,$$

которые, в свою очередь, определяют левое, правое и сопряженное действия G на X. По умолчанию, действие G на X полагаем левым, т.е. $g \cdot x = gx$.

Определение 2.6. *Пусть $G = X$ — группа. Множества $AP(\mu|\nu)$, $S(\mu|\nu)$, $A(\mu|\nu)$, $E(\mu|\nu)$, $I(\mu|\nu)$ относительно левого (правого, сопряженного) действия будем обозначать с индексом l (соответственно r, c) внизу, т.е.*

$$AP_l(\mu|\nu), S_l(\mu|\nu), A_r(\mu|\nu), E_c(\mu|\nu) \ \text{ и т.д.}$$

Положим $A_t(\mu|\nu) = A_l(\mu|\nu) \cap [A_r(\mu|\nu)]^{-1}$, $A_t(\mu) = A_l(\mu) \cap [A_r(\mu)]^{-1}$ и т.д.

Отметим, что для некоммутативных групп P.L. Brockett [5] и Y. Okazaki [8] допустимыми сдвигами называют элементы из $A_t(\mu)$.

Естественно рассматривать аналоги разложения Лебега с точностью до "сдвига". Пусть $G^* = G \cup \{id_X\}$ — полугруппа с единицей. Соответствующие множества относительно G^* обозначим через $AP^*(\mu|\nu), A^*(\mu|\nu)$ и т.д.

Определение 2.7. *Если $AP^*(|\nu|||\mu|) = \emptyset$, то меру μ назовем d-сингулярной относительно меры ν. Обозначение $\mu \perp_d \nu$. Меры μ и ν назовем взаимно d-сингулярными, если $\mu \perp_d \nu$ и $\nu \perp_d \mu$.*

Положим $\mu \ll_d \nu$, если существует последовательность g_i (конечная или бесконечная) такая, что

$$|\mu| \ll \sum_i \alpha_i |\nu|_{g_i}, \alpha_i > 0, \sum_i \alpha_i < \infty, g_i \in G^*.$$

Меры μ и ν назовем d-эквивалентными, обозначение $\mu \sim_d \nu$, если $\mu \ll_d \nu$ и $\nu \ll_d \mu$.

Очевидно, что отношение $\ll_d$ определяет частичный порядок на $M(X)$, а отношение $\sim_d$ — отношение эквивалентности.

Отметим, что если G — группа и $\mu \perp_d \nu$, то $AP(\mu|\nu) = AP(\nu|\mu) = \emptyset$ и $\nu \perp_d \mu$, т.е. μ и ν взаимно d-сингулярны. Так же, в случае, когда G — группа, имеем $\mu_g \sim_d \mu$. Для полугрупп это неверно (см. пример 4.1 ниже).

Очевидно, что если $E \in \mathcal{F}(\mu)$, то $\mu|_E \perp_d \mu - \mu|_E$.

Особый интерес представляют простейшие, относительно d-эквивалентности, меры.

Определение 2.8. *Мера μ называется t-эргодической, если любые ее части d-эквивалентны, т.е., более подробно, для любых ее частей α и β существуют $g, h \in G^*$ такие, что $\alpha_g \not\perp \beta$ и $\alpha \not\perp \beta_h$.*

3. Алгебраические свойства

Следующая теорема (справедливая и для σ-конечной меры) устанавливает некоторые, в основном алгебраические, свойства этих множеств. Отметим что свойство 4 и некоторые включения в 6, не касающиеся $I(\mu)$, для случая когда $X = G$ — группа, доказаны в [8].

Теорема 3.1. *1. Если $B(\mu)$ есть одно из множеств: $I(\mu)$, $E(\mu)$, $A(\mu)$, $AP(\mu)$ или $S(\mu)$ и g — обратим, то*

$$B(\mu_g)g = gB(\mu) \quad \text{или} \quad B(\mu_g) = gB(\mu)g^{-1}.$$

2. Если $\mu \sim \nu$, то $B(\mu) = B(\nu)$, где $B(.)$ есть одно из множеств: $E(.)$, $A(.)$, $AP(.)$ или $S(.)$.

3. Если $\mu \ll \nu$, то $AP(\mu) \subset AP(\nu), S(\nu) \subset S(\mu)$.

4. $A(\mu)$, $E(\mu)$, $I(\mu)$ есть подполугруппы (с единицей, если G обладает ею), а если G — группа, то $I(\mu)$ и $E(\mu)$ — подгруппы (вообще говоря, не нормальные) группы G.

*5. 1) Если h — обратим и $h \in AP(\mu)$, то $h^{-1} \in AP(\mu)$.
Если же G — группа, то*

$$AP(\mu) = (AP(\mu))^{-1} \ (\textit{значит, и } S(\mu) = (S(\mu))^{-1}).$$

В частности, если $AP(\mu)$ — подполугруппа, то $AP(\mu)$ — подгруппа группы G.

*2) Если h — обратим и $\{h, h^{-1}\} \subset A(\mu)$, то $h \in E(\mu)$.
Если же G — группа, то*

$$A(\mu) \cap [A(\mu)]^{-1} = E(\mu).$$

Поэтому $A(\mu)$ является группой тогда и только тогда, когда $A(\mu) = E(\mu)$. Как следствие получаем: если $h \in A(\mu)$ и $h^n \in E(\mu)$, то $h \in E(\mu)$.

3) Если G — группа и $A(\mu) = AP(\mu)$, то $AP(\mu) = A(\mu) = E(\mu)$.

6. Если G — полугруппа с единицей, то:

1) $S(\mu) \cdot A(\mu) = S(\mu), A(\mu) \cdot S(\mu) \supset S(\mu)$;

2) $AP(\mu) \cdot A(\mu) \supset AP(\mu), A(\mu) \cdot AP(\mu) = AP(\mu)$;

3) $E(\mu) \cdot A(\mu) = A(\mu) \cdot E(\mu) = A(\mu) = I(\mu) \cdot A(\mu) = A(\mu) \cdot I(\mu)$;

4) $E(\mu) \cdot S(\mu) = S(\mu) \cdot E(\mu) = S(\mu) = I(\mu) \cdot S(\mu) = S(\mu) \cdot I(\mu)$;

5) $E(\mu) \cdot AP(\mu) = AP(\mu) \cdot E(\mu) = AP(\mu) = I(\mu) \cdot AP(\mu) = AP(\mu) \cdot I(\mu)$.

Доказательство. Без усложнения доказательства будем считать меры μ и ν вероятностными.

1. Пусть $h \in S(\mu_g)$, тогда существует $E \in \mathcal{B}$ такое, что $\{\mu_g(E) = 1$ и $\mu_g(h^{-1}E) = 0\} \Longleftrightarrow \{\mu(g^{-1}E) = 1$ и $\mu(g^{-1}h^{-1}E) = 0\} \Longleftrightarrow$ (полагая $\overline{E} = g^{-1}E$) $\{\mu(\overline{E}) = 1$ и $\mu(g^{-1}h^{-1}g\overline{E}) = 0\} \Longleftrightarrow \{g^{-1}hg \in S(\mu)\}$.

Пусть $h \in AP(\mu_g)$, тогда, учитывая равенство для $S(\mu)$ и (2.7), имеем $G = g(AP(\mu) \cup S(\mu))g^{-1} = gAP(\mu)g^{-1} \cup gS(\mu)g^{-1} = gAP(\mu)g^{-1} \cup S(\mu_g)$, и т.к. $gAP(\mu)g^{-1} \cap S(\mu_g) = \emptyset$, то, снова учитывая (2.7), получаем, что $AP(\mu_g) = gAP(\mu)g^{-1}$.

Остальное доказывается аналогично.

2.3.4. Очевидно.

5. 1) Пусть $h \in AP(\mu)$, тогда $\mu = \mu_1 + \mu_2, \mu_h = \nu_1 + \nu_2$, где $\nu_1 \sim \mu_1 \neq 0$. Поэтому $\mu_{h^{-1}} = (\mu_1)_{h^{-1}} + (\mu_2)_{h^{-1}} \gg (\mu_1)_{h^{-1}} \sim (\nu_1)_{h^{-1}} \ll (\mu_h)_{h^{-1}} = \mu$. Значит, $\mu_{h^{-1}} \not\perp \mu$ и $h^{-1} \in AP(\mu)$.

2) Если $h, h^{-1} \in A(\mu)$ и $E \in \mathcal{B}$ такое, что $\mu_h(E) = \mu(h^{-1}E) = 0$, то, полагая $\overline{E} = h^{-1}E$, имеем $0 = \mu_{h^{-1}}(\overline{E}) = \mu(h\overline{E}) = \mu(E)$, т.е. $h \in E(\mu)$.

Пусть $h \in A(\mu)$ и $h^k \in E(\mu)$. Если $E \in \mathcal{B}$ такое, что $\mu_h(E) = 0$, то $\mu_{h^k}(E) = 0$. Значит, $\mu(E) = 0$ и $h \in E(\mu)$.

3) Если $AP(\mu) = A(\mu)$ и $g \in A(\mu)$ то, по 1), $g^{-1} \in A(\mu)$. Следовательно, по 2), $g \in E(\mu)$. Поэтому $AP(\mu) = A(\mu) = E(\mu)$.

6. 1) Пусть $g \in S(\mu), h \in A(\mu)$ и $E \in \mathcal{B}$ такое, что $\mu(E) = 1$ и $\mu_g(E) = \mu(g^{-1}E) = 0$. Тогда $\mu_{gh}(E) = \mu(h^{-1}(g^{-1}E)) = 0$, т.е. $gh \in S(\mu)$ и $S(\mu) \cdot A(\mu) \subset S(\mu)$. Так как $e \in A(\mu)$, то верно и обратное включение.

Очевидно, что $A(\mu) \cdot S(\mu) \supset S(\mu)$.

2) Пусть $h \in A(\mu), g \in AP(\mu)$. Если $\mu_g = \nu_1 + \nu_2$, где $\nu_1 \ll \mu, \nu_2 \perp \mu$, то $\mu_{hg} = (\mu_g)_h = (\nu_1)_h + (\nu_2)_h$. А так как $(\nu_1)_h \ll \mu_h \ll \mu$, то $\mu_{hg} \not\perp \mu$ и $hg \in AP(\mu)$. Поэтому $A(\mu) \cdot AP(\mu) \subset AP(\mu)$. Обратное включение очевидно.

Ясно, что $AP(\mu) \cdot A(\mu) \supset AP(\mu)$.

3) Очевидно.

4) $S(\mu) \subset S(\mu) \cdot I(\mu) \subset S(\mu) \cdot E(\mu) \subset S(\mu) \cdot A(\mu) = S(\mu)$.

Пусть $h \in E(\mu), g \in S(\mu)$ и $E \in \mathcal{B}$ такое, что $\mu_g(E) = 0$ и $\mu(E) = 1$. Положим $\overline{E} = E \cap h^{-1}E \cap h^{-2}E \cap \ldots$. Тогда $\mu(\overline{E}) = 1$ и $\mu_g(\overline{E}) = 0$. Значит, $\mu_{hg}(\overline{E}) = (\mu_g)_h(\overline{E}) = 0$ и $hg \in S(\mu)$.

Если G — группа, то доказательство упрощается:

$S(\mu) \subset I(\mu) \cdot S(\mu) \subset E(\mu) \cdot S(\mu) \subset (A(\mu))^{-1} \cdot (S(\mu))^{-1} = (S(\mu) \cdot A(\mu))^{-1} = (S(\mu))^{-1} = S(\mu)$.

5) $AP(\mu) \subset I(\mu) \cdot AP(\mu) \subset E(\mu) \cdot AP(\mu) \subset A(\mu) \cdot AP(\mu) = AP(\mu)$.

Пусть $h \in E(\mu), g \in AP(\mu)$. Тогда $\mu_{gh} = (\mu_h)_g \sim \mu_g \not\perp \mu$, т.е. $gh \in AP(\mu)$.

Если G — группа, то доказательство упрощается:

$AP(\mu) \subset AP(\mu) \cdot I(\mu) \subset AP(\mu) \cdot E(\mu) \subset (AP(\mu))^{-1} \cdot (A(\mu))^{-1} = (A(\mu) \cdot AP(\mu))^{-1} = (AP(\mu))^{-1} = AP(\mu)$. Теорема доказана. ■

З а м е ч а н и е 3.1. Все условия теоремы существенны. Кроме того, пусть G — группа, тогда, если G абелева или состоит из элементов конечного порядка, то в п. 6 верны и обратные включения (в силу п. 5.2). Но, вообще говоря, это не всегда верно, даже если $X = G$ — локально-компактная группа (если для $h \in A(\mu)$, обратное включение не выполняется, то, в силу пп. 5.2 и 6.4, $h^{-1} \notin A(\mu)$). Рассмотрим пример. Пусть $X = G = \mathbb{F}_2$ — свободная группа с образующими g и h. Пусть H — полугруппа с единицей, порожденная g и h, а мера μ сосредоточена на H. Тогда g, $h \in A(\mu)$. Так как $hH \cap gH = \emptyset$, то $\mu_h \perp \mu_g$. Поэтому $\mu_{g^{-1}h} \perp \mu$ и $g^{-1}h \in S(\mu)$. В частности, $AP(\mu)$ не содержит подгруппы, порожденной $A(\mu)$.

П р и м е р 3.1. Пусть μ — дискретная вероятностная мера и $S = \{x : \mu(\{x\}) > 0\}$. Очевидно, что

$$AP(\mu) = \{g : \ g \cdot S \cap S \neq \emptyset\}, \ A(\mu) = \{g : \ g \cdot S \subset S\}, \ E(\mu) = \{g : \ g \cdot S = S\}.$$

В следующей теореме устанавливаются свойства множеств из определения 2.4, аналогичные сформулированным в теореме 3.1, если они имеют место.

Теорема 3.2. *1. Если $B(\mu|\nu)$ есть одно из множеств определения 2.4, и g, h — обратимы, то*

$$B(\mu_g|\nu_h) = h \cdot B(\mu|\nu) \cdot g^{-1}.$$

2. Если $\mu_1 \sim \mu_2$ и $\nu_1 \sim \nu_2$, то $B(\mu_1|\nu_1) = B(\mu_2|\nu_2)$, где $B(.)$ — одно из множеств: $E(.)$, $A(.)$, $AP(.)$ или $S(.)$.

В частности, если $g \in E(\mu|\nu)$, т.е. $\mu_g \sim \nu$ и g, h — обратимы, то

$$B(\mu|\nu) = g \cdot B(\mu) = B(\nu) \cdot g = g \cdot B(\nu|\mu) \cdot g \text{ и } B(\mu_g|\mu_h) = h \cdot B(\mu) \cdot g^{-1},$$

где $B(\mu)$ есть $E(\mu)(A(\mu)$, $AP(\mu)$, $S(\mu))$, а $B(\mu|\nu) = E(\mu|\nu)$ $(A(\mu|\nu)$, $AP(\mu|\nu)$, $S(\mu|\nu))$.

3. Если $\mu_1 \ll \mu_2$, $\nu_1 \ll \nu_2$, то $AP(\mu_1|\nu_1) \subset AP(\mu_2|\nu_2)$, $S(\mu_1|\nu_1) \subset S(\mu_2|\nu_2)$.

4. Если G — группа и $I(\mu|\nu)$, $E(\mu|\nu)$ — не пусты, то они являются левыми (правыми) классами смежности $I(\mu)$ и $E(\mu)$ соответственно (соответственно $I(\nu)$ и $E(\nu)$).

5. Если G — группа, $g \in E(\mu|\nu)$ — обратим и $A(\mu|\nu) = AP(\mu|\nu)$, то $AP(\mu|\nu) = A(\mu|\nu) = E(\mu|\nu) = g \cdot E(\mu)$.

6. Если G — группа, то

1) $I(\mu|\nu) = [I(\nu|\mu)]^{-1}, E(\mu|\nu) = [E(\nu|\mu)]^{-1}, AP(\mu|\nu) = [AP(\nu|\mu)]^{-1}$;

2) $A(\mu|\nu) \cap [A(\nu|\mu)]^{-1} = E(\mu|\nu)$. В частности, если $A(\mu|\nu) = [A(\nu|\mu)]^{-1}$, то $A(\mu) = E(\mu)$ и $A(\nu) = E(\nu)$.

7. 1) Если $A(\mu|\nu)$ и $A(\nu|\mu)$ — не пусты, то $A(\nu|\mu) \cdot A(\mu|\nu) \subset A(\mu)$.

2) Если G обладает единицей и $g \in H(\mu|\nu)$ — обратим, где $H(.)$ есть или $I(.)$, или $E(.)$, то

$$H(\mu|\nu) \cdot B(\nu|\mu) = B(\nu)\,, \quad B(\nu|\mu) \cdot H(\mu|\nu) = B(\mu)\ ,$$

где $B(.)$ есть либо $E(.)$, либо $A(.)$, либо $S(.)$, либо $AP(.)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без усложнения доказательства будем считать меры μ и ν вероятностными.

1. 2. 3. Очевидно.

4. Пусть $I(\mu|\nu) \neq \emptyset$ и $g \in I(\mu|\nu)$. Тогда, по 1, мы имеем $I(\mu|\nu) = I(\mu|\mu_g) = gI(\mu|\mu) = gI(\mu)$ и $I(\mu|\nu)$ — левый класс смежности группы $I(\mu)$. Аналогично и для $I(\nu)$.

Если $E(\mu|\nu) \neq \emptyset$, то, по 2, $E(\mu|\nu) = gE(\mu)$, где $g \in E(\mu|\nu)$, откуда следует требуемое. (Для $A(\mu|\nu)$ подобное утверждение неверно.)

5. Если $g \in E(\mu|\nu)$, т.е. $\mu_g \sim \nu$. Тогда, по 2, $AP(\mu|\nu) = gAP(\mu), A(\mu|\nu) = gA(\mu), E(\mu|\nu) = gE(\mu)$. Значит, $AP(\mu) = A(\mu)$ и требуемое вытекает из п. 5.3 теоремы 3.1.

6. 1) Очевидно.

2) Пусть g принадлежит левой части. Это равносильно тому, что $\mu_g \ll \nu$ и $\nu_{g^{-1}} \ll \mu$, т.е. $\mu_g \sim \nu$. Поэтому $g \in E(\mu|\nu)$.

Обратно, если $g \in E(\mu|\nu)$, то $g \in A(\mu|\nu)$ и, по 1), $g^{-1} \in E(\nu|\mu) \subset A(\nu|\mu)$ или $g \in [A(\nu|\mu)]^{-1}$, что и требовалось.

Если $A(\mu|\nu) = [A(\nu|\mu)]^{-1}$, то $A(\mu|\nu) = E(\mu|\nu)$, и если $g \in E(\mu|\nu)$, то, по п. 2, мы имеем $A(\mu|\nu) = gA(\mu) = gE(\mu)$, откуда $A(\mu) = E(\mu)$. Аналогично $A(\nu) = E(\nu)$.

7. 1) Если $g \in A(\mu|\nu)$, т.е. $\mu_g \ll \nu$, и $h \in A(\nu|\mu)$, т.е. $\nu_h \ll \mu$, то $\mu_{hg} = (\mu_g)_h \ll \nu_h \ll \mu$ и $hg \in A(\mu)$.

Если $g \in E(\mu|\nu)$ — обратим, то включение станет равенством. Это следует из п. 2. и теоремы 3.1: $A(\nu|\mu) \cdot A(\mu|\nu) = A(\mu)g^{-1} \cdot gA(\mu) = A(\mu) \cdot A(\mu) = A(\mu)$.

2) Пусть $g \in H(\mu|\nu)$, тогда, по п. 2 и теореме 3.1, имеем

$$H(\mu|\nu) \cdot B(\nu|\mu) = H(\mu|\mu_g) \cdot B(\mu_g|\mu) = gH(\mu) \cdot B(\mu)g^{-1} = gB(\mu)g^{-1}$$

$$= B(\mu_g|\mu_g) = B(\nu).$$

$$B(\nu|\mu) \cdot H(\mu|\nu) = B(\mu)g^{-1} \cdot gH(\mu) = B(\mu).$$

Теорема доказана. ■

Так же, как и в предыдущей теореме, все условия, вообще говоря, существенны, а включения строгие.

Некоторая связь множеств из определения 2.3 для различных действий группы G на себе устанавливается в следующей теореме.

Теорема 3.3. *Пусть $X = G$ — топологическая группа.*

1. *Пусть B есть либо AP, либо S, либо A, либо E, либо I. Тогда*

$$B_r(L_g(\mu)) = B_r(\mu), \quad B_l(R_g(\mu)) = B_l(\mu)$$

и как следствие

$$B_t(L_g(\mu)) = gB_l(\mu)g^{-1} \cap B_r(\mu)\,, \quad B_t(R_g(\mu)) = gB_r(\mu)g^{-1} \cap B_l(\mu).$$

2. Если $g \in I_t(\mu|\nu)$, *то* $I_t(\mu|\nu) = gI_l(\mu) \cap I_r(\mu)g^{-1} = g^{-1}I_r(\nu) \cap I_l(\nu)g$.
Если $g \in E_t(\mu|\nu)$, *то* $E_t(\mu|\nu) = gE_l(\mu) \cap E_r(\mu)g^{-1} = g^{-1}E_r(\nu) \cap E_l(\nu)g$.

3. *1)* $I_t(\mu|\nu) = [I_t(\nu|\mu)]^{-1}, E_t(\mu|\nu) = [E_t(\nu|\mu)]^{-1}, AP_t(\mu|\nu) = [AP_t(\nu|\mu)]^{-1}$.
2) $A_t(\mu|\nu) \cap [A_t(\nu|\mu)]^{-1} = E_t(\mu|\nu)$ *и* $A_t(\mu)$ *— полугруппа.*

4. *1) Если* $A_t(\mu|\nu)$ *и* $A_t(\nu|\mu)$ *— не пусты, то* $A_t(\nu|\mu) \cdot A_t(\mu|\nu) \subset A_l(\mu) \cap A_r^{-1}(\nu)$.
2) Если $H_t(.)$ *есть или* $I_t(.)$, *или* $E_t(.)$ *и* $H_t(\mu|\nu)$ *— не пусто, то*

$$H_t(\mu|\nu) \cdot B_t(\nu|\mu) \subset B_l(\nu) \cap B_r^{-1}(\mu), \ B_t(\nu|\mu) \cdot H_t(\mu|\nu) \subset B_l(\mu) \cap B_r^{-1}(\nu).$$

5. $B_r(\check{\mu}) = B_l(\mu)$. *В частности, если* μ *симметрична, то* $A_t(\mu) = E_l(\mu) = E_r(\mu)$.

Доказательство. **1.** Через $\cdot$ будем обозначать один из символов $\perp, \not\perp, \ll$ и т.д. Имеем

$$q \in B_r(L_g(\mu)) \Leftrightarrow R_q L_g(\mu).L_g(\mu) \Leftrightarrow R_q(\mu).\mu \Leftrightarrow q \in B_r(\mu).$$

Аналогично доказывается второе равенство. По теореме 3.1, имеем

$$B_t(L_g(\mu)) = B_r(L_g(\mu)) \cap B_l(L_g(\mu)) = gB_l(\mu)g^{-1} \cap B_r(\mu).$$

2. По теореме 3.2 (4), имеем

$$I_t(\mu|\nu) = I_l(\mu|\nu) \cap I_r^{-1}(\mu|\nu) = gI_l(\mu) \cap I_r(\mu)g^{-1} = I_l(\nu)g \cap g^{-1}I_r(\nu).$$

3. 1) $g \in I_t^{-1}(\nu|\mu) \Leftrightarrow \{g^{-1} \in I_l(\nu|\mu),\ g \in I_r(\nu|\mu)\} \Leftrightarrow \{g \in I_l(\mu|\nu),\ g^{-1} \in I_r(\mu|\nu)\} \Leftrightarrow g \in I_t(\mu|\nu)$.

2) $g \in A_t(\mu|\nu) \cap A_t^{-1}(\nu|\mu) \Leftrightarrow \{g \in A_l(\mu|\nu) \cap A_l^{-1}(\nu|\mu),\ g^{-1} \in A_r(\mu|\nu) \cap A_r^{-1}(\nu|\mu)\} \Leftrightarrow \{g \in E_l(\mu|\nu),\ g \in E_r^{-1}(\mu|\nu)\} \Leftrightarrow g \in E_t(\mu|\nu)$.

4. 1) Пусть $g \in A_t(\nu|\mu)$ и $h \in A_t(\mu|\nu)$. Тогда $g \in A_l(\nu|\mu)$, $h \in A_l(\mu|\nu)$. Поэтому $g \cdot h \in A_l(\mu)$. Аналогично, $g^{-1} \in A_r(\nu|\mu)$, $h^{-1} \in A_r(\mu|\nu)$. Поэтому $h^{-1}g^{-1} \in A_r(\nu)$ или $gh \in A_r^{-1}(\nu)$.

2) Пусть $h \in B_t(\nu|\mu)$ и $g \in H_t(\mu|\nu)$. Тогда $g \in H_l(\mu|\nu)$, $h \in B_l(\nu|\mu)$. Поэтому $g \cdot h \in B_l(\nu)$. Аналогично, $g^{-1} \in H_r(\mu|\nu)$, $h^{-1} \in B_r(\nu|\mu)$. Поэтому $h^{-1}g^{-1} \in B_r(\nu|\mu) \cdot H_r(\mu|\nu) = B_r(\mu)$ или $gh \in B_r^{-1}(\mu)$. Кроме того, $hg \in B_l(\mu)$ и $g^{-1}h^{-1} \in H_r(\mu|\nu) \cdot B_r(\nu|\mu) = B_r(\nu)$. Поэтому $hg \in B_r^{-1}(\nu)$.

5. Очевидно (см. и ср. [8]). Теорема доказана. ■

Некоторые свойства множеств $I_0(\mu)$ содержатся в следующем предложении.

Предложение 3.1.

1. *$I_0(\mu)$ является под(полу)группой (полу)группы G.*

2. *Если G — группа, то $I_0(\mu)$ — нормальная подгруппа в $E(\mu)$.*

3. *Если G метризуема, то $I_0(\mu)$ замкнута.*

Доказательство. Будем считать, что мера μ вероятностная.

1) Пусть $g_1, g_2 \in I_0(\mu)$. Тогда, если $x \in Z(g_1) \cap Z(g_2)$, то $(g_1 g_2) \cdot x = x$. Поэтому $\mu(Z(g_1 g_2)) \geq \mu(Z(g_1) \cap Z(g_2)) = 1$. Значит, $g_1 g_2 \in I_0(\mu)$.

Если g — обратим, то $Z(g) = Z(g^{-1})$. Поэтому $g^{-1} \in I_0(\mu)$.

2) Пусть $g \in E(\mu), h \in I_0(\mu)$. Покажем, что $ghg^{-1} \in I_0(\mu)$. Так как

$$(ghg^{-1}) \cdot x = x \Leftrightarrow hg^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot x \Leftrightarrow g^{-1} \cdot x \in Z(h) \Leftrightarrow x \in gZ(h),$$

то $Z(ghg^{-1}) = gZ(h)$. Но $g \in E(\mu)$, поэтому $\mu(X \setminus gZ(h)) = \mu_{g^{-1}}(X \setminus Z(h)) = \mu(X \setminus Z(h)) = 0$.

3) Пусть $g_n \to g_0$. Так как $x = g_n \cdot x \to g_0 \cdot x$, то $\cap_n Z(g_n) \subset Z(g_0)$. Поэтому $\mu(Z(g_0)) = 1$ и $g_0 \in I_0(\mu)$. ∎

В следующем предложении мы коснемся свойств плотностей при допустимых преобразованиях. Эти результаты обобщают аналогичные утверждения в случае гильбертова пространства, рассмотренные в [3, гл. IV, § 19], (т.к. доказательство не изменяется, то оно опущено). Для упрощения записи положим

$$\rho_\mu(x, g) \equiv \frac{d\mu_g}{d\mu}(x); \;\; H(x) \equiv \frac{d\mu}{d\nu}(x).$$

Предложение 3.2. *Пусть $g \in G$ — обратим. Тогда:*

1) *если $g, h \in A(\mu)$, то:* $\rho_\mu(x, gh) = \rho_\mu(x, g) \cdot \rho_\mu(g^{-1} \cdot x, h)(mod\mu)$;

2) *если $g \in E(\mu)$, то:* $\rho_\mu(x, g^{-1}) = \dfrac{1}{\rho_\mu(g \cdot x, g)}(mod\mu)$;

3) *если $\mu \ll \nu$ и $g \in A(\mu)$, то:* $\rho_\mu(x, g) = \dfrac{H(g^{-1} \cdot x)}{H(x)} \rho_\nu(x, g) \;\; (mod\mu)$.

4. Разложение типа разложения Лебега

Обозначим через $M_\nu^{\ll}$ и $M_\nu^{\perp}$ множества

$$M_\nu^{\ll} \equiv \{\mu \in M(X) : \mu \ll_d \nu\} \quad M_\nu^{\perp} \equiv \{\mu \in M(X) : \mu \perp_d \nu\}.$$

Предложение 4.1. *$M_\nu^{\ll}$ и $M_\nu^{\perp}$ являются L-подпространствами и* $M_\nu^{\ll} \cap M_\nu^{\perp} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $|\mu_1| \ll \sum_i \alpha_i |\nu|_{g_i}, |\mu_2| \ll \sum_j \beta_j |\nu|_{h_j}$, тогда

$$|a\mu_1 + b\mu_2| \ll |a||\mu_1| + |b||\mu_2| \ll \sum_i \alpha_i |\nu|_{g_i} + \sum_j \beta_j |\nu|_{h_j}.$$

Значит, $M_\nu^{\ll}$ — подпространство. Пусть $\mu_i \to \mu$ и $\mu_i \ll_d \nu$. Если $\mu_i \ll \sum_k a_k^i |\nu|_{g_k^i}$ (без ограничения общности мы будем считать, что $id_X \in \{g_k^i\}$ при любом i) и $L = \{t_m\}$ — полугруппа с единицей в G^*, порожденная элементами g_k^i, тогда

$$|\mu_i| \ll \sum_i \sum_k \alpha_i a_k^i |\nu|_{g_k^i} \ll \sum_i \beta_i |\nu|_{t_i}.$$

Откуда следует, что $|\mu| \ll \sum_i \beta_i |\nu|_{t_i}$, т.е. $\mu \ll_d \nu$. Следовательно, $M_\nu^{\ll}$ замкнуто.

Пусть $\mu_i \perp_d \nu$, $i = 1, 2$, т.е. $|\mu|_i \perp |\nu|_g$, $\forall g \in G^*$, $i = 1, 2$. Тогда очевидно, что $|a_1\mu_1 + a_2\mu_2| \perp |\nu|_g, \forall g \in G^*$. Значит, $M_\nu^{\perp}$ — подпространство. Если $\mu_i \to \mu$ и $|\mu| \not\perp |\nu|_g$ при некотором $g \in G^*$, тогда, начиная с некоторого i_0, $|\mu_i| \not\perp |\nu|_g$, что невозможно. Значит, $M_\nu^{\perp}$ замкнуто.

Очевидно, что $M_\nu^{\ll}$ и $M_\nu^{\perp}$ являются L-подпространствами и $M_\nu^{\ll} \cap M_\nu^{\perp} = \{0\}$. Предложение доказано. ■

Для доказательства следующей теоремы, которую можно рассматривать как разложение Лебега относительно отношения d-эквивалентности, нам понадобятся следующие операторы: если μ и ν — две меры и $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где $\mu_1 \ll \nu$, а $\mu_2 \perp \nu$ — разложение Лебега меры μ относительно меры ν, то положим

$$T_\nu(\mu) = \mu_1.$$

Если $g \in G$ фиксировано, то оператор $T_\nu(\mu_g)$ обозначим через $T_{\nu,g}(\mu)$.

Теорема 4.1. *Любую меру μ можно единственным образом представить в виде*

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 \;, \quad \text{где } \mu_1 \perp \mu_2, \;\; \mu_1 \ll_d \nu, \;\; \mu_2 \perp_d \nu, \tag{4.1}$$

т.е. $M(X)$ разлагается в прямую сумму

$$M(X) = M_\nu^{\ll} \oplus M_\nu^{\perp}.$$

Если G — группа, то любые меры μ и ν можно представить единственным образом в виде

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 \qquad \nu = \nu_1 + \nu_2,$$

где $\mu_1 \sim_d \nu_1$, а остальные пары мер μ_1 и μ_2, μ_1 и ν_2, ν_1 и ν_2, ν_1 и μ_2, μ_2 и ν_2 — взаимно d-сингулярны.

Доказательство. Пусть $a = \sup\{\|\mathrm{T}_\gamma(\mu)\|$, где $\gamma = \sum \frac{1}{2^m}|\nu|_{g_m}$, $g_m \in AP^*(|\nu||\mu|)\}$. Так как мера μ конечна, то $a < \infty$ и достигается на некоторой последовательности $\{g_m\}$. Обозначим через $\mu_1 = \mathrm{T}_\gamma(\mu)$ и $\mu_2 = \mu - \mu_1$. Очевидно, что $\mu = \mu_1 + \mu_2$ — искомое разложение.

Предположим что G — группа. Представим ν в виде $\nu = \nu_1 + \nu_2$, где $\nu_2 \perp_d \mu$ и $\nu_1 \ll_d \mu$. Покажем, что найденные разложения искомые. Из построения, очевидно, следует, что нужно показать только d-эквивалентность мер μ_1 и ν_1, если они отличны от нуля. Но $\mu_1 \ll \sum_i \alpha_i |\nu_1|_{g_i} + \sum_i \alpha_i |\nu_2|_{g_i}$. Так как $\nu_2 \perp_d \mu_1$, то $\mu_1 \ll \sum_i \alpha_i |\nu_1|_{g_i}$. Значит, $\mu_1 \ll_d \nu_1$. Аналогично можно показать, что $\nu_1 \ll_d \mu_1$. Поэтому $\mu_1 \sim_d \nu_1$. Теорема доказана. ∎

Следствие 4.1. *Пусть μ — t-эргодична и ν — произвольная мера. Тогда либо $\mu \ll_d \nu$, либо $\mu \perp_d \nu$.*

Доказательство. Пусть $\mu = \mu_1 + \mu_2$ — разложение (4.1). Если $\mu_1 \neq 0$, то, по определению t-эргодичности, $\mu_2 \ll_d \mu_1 \ll_d \nu$, т.е. $\mu_2 = 0$. ∎

Следствие 4.2. *Пусть $A \in \mathcal{F}(\mu)$ и $B \in \mathcal{B}$, тогда справедливо разложение*

$$\mu|_A = \alpha_1 + \alpha_2\ , \quad \text{где } \alpha_1 \ll_d \mu|_B \ll \mu - \alpha_2 \quad \text{и} \quad \alpha_2 \perp_d (\mu - \alpha_2).$$

Если G — группа, то существуют единственные разложения

$$\mu|_A = \alpha_1 + \alpha_2\ , \quad \mu|_B = \beta_1 + \beta_2\ ,$$

где $\alpha_1 \sim_d \beta_1$, β_1 является частью α_1, $\mu|_B \ll \mu - \alpha_2 \perp_d \alpha_2$, $\mu|_A \ll \mu - \beta_2 \perp_d \beta_2$. Если к тому же $B \in \mathcal{F}(\mu)$, то $\alpha_1 = \beta_1$.

Доказательство. Достаточно доказать, что 1) $\alpha_2 \perp_d (\mu - \alpha_2)$ и 2) β_1 является частью α_1.

Первая часть вытекает из утверждения

(i) если $E \in \mathcal{F}(\mu)$ и $\mu|_E = \alpha_1 + \alpha_2$, где $\alpha_1 \perp_d \alpha_2$, то $\alpha_1 \perp_d (\mu - \alpha_1)$

(это утверждение нетрудно доказать: т.к. $\alpha_1 \perp_d \alpha_2$ и $\mu|_E \perp_d \mu - \mu|_E$, то $\alpha_1 \perp_d (\alpha_2 + (\mu - \mu|_E)) = \mu - \alpha_1$).

Докажем вторую часть. Имеем β_1 — часть μ и $\beta_1 \ll_d \alpha_1$. Но α_1 — тоже часть μ, причем, по утверждению (i), $\alpha_1 \perp_d (\mu - \alpha_1)$. Поэтому $\beta_1 \perp_d (\mu - \alpha_1)$. Значит, $\beta_1 \ll \mu - (\mu - \alpha_1) = \alpha_1$ и β_1 является частью α_1. ∎

Отметим, что для полугруппы получить разложения, аналогичные случаю группы, невозможно.

Пример 4.1. Если положить $X = \mathbb{R}^2$, $G = End(X)$, ν — распределение Гаусса на X, g — проекция на ось Ox и $\mu = \nu_g$. Тогда очевидно, что 1) $\mu \ll_d \nu$, но $\mu \not\sim_d \nu$; 2) $\mu = \mu_1$, а $\nu = \nu_2$. Если положить $\gamma = \nu + \mu$ и рассмотреть пару μ и γ, то $\gamma_1 = \mu$, $\gamma_2 = \nu$ и $\gamma_1 \not\perp_d \gamma_2$.

Воспользуемся разложением мер μ и ν в теореме 4.1 для установления некоторых свойств множеств, введенных в определении 2.3 относительно операции сложения мер.

Предложение 4.2.

1. *Пусть μ_i, $\nu_j \in M^+(X)$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,M}$, где N и M конечны или бесконечны. Тогда*

$$AP\left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i \Big| \sum_{j=1}^{M} \nu_j\right) = \bigcup_{i,j=1}^{N} AP(\mu_i|\nu_j), \tag{4.2}$$

   в частности, если g_i — обратимы, то

$$AP\left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i\right) = \bigcup_{i,j=1}^{N} AP(\mu_i|\mu_j) \qquad AP\left(\sum_{i=1}^{N} \mu_{g_i}\right) = \bigcup_{i,j=1}^{N} g_i AP(\mu) g_j^{-1}.$$

   Формула (4.2) остается верной для любых взаимно сингулярных мер μ_i и взаимно сингулярных мер ν_j.

2. *Если G — группа, μ, $\nu \in M^+(X)$ и $\mu = \mu_1+\mu_2$, $\nu = \nu_1+\nu_2$ — разложение мер μ и ν в теореме 4.1, то:*
   1) $A(\mu + \nu) = A(\mu_2) \cap A(\nu_2) \cap A(\mu_1 + \nu_1)$;
   2) $E(\mu + \nu) = E(\mu_2) \cap E(\nu_2) \cap E(\mu_1 + \nu_1)$;
   3) $I(\mu + \nu) = I(\mu_2) \cap I(\nu_2) \cap I(\mu_1 + \nu_1)$.

Доказательство. **1.** Обозначим через $\mu = \sum_{i=1}^{N} \mu_i$, $\nu = \sum_{j=1}^{M} \nu_j$. Тогда $g \in AP(\mu|\nu) \Leftrightarrow \mu_g \not\perp \nu \Leftrightarrow (\mu_i)_g \not\perp \nu_j$ при некоторых i и j $\Leftrightarrow g \in \bigcup_{i,j=1}^{N} AP(\mu_i|\nu_j)$.
Частный случай вытекает из теоремы 3.2 .

2. Все равенства 1)–3), очевидно, вытекают из определений μ_i и ν_i, $i = 1, 2$. ■

Следствие 4.3. *Если G — группа и $AP(\mu|\nu) \neq \emptyset$, то существует счетное подмножество элементов $g_i \in AP(\mu|\nu)$ таких, что*

$$AP(\mu|\nu) \subset \bigcup_i g_i AP(\mu).$$

Доказательство. Так как мера ν — конечна, то на некоторой последовательности $g_i \in AP(\mu|\nu)$ абсолютно непрерывная часть ν_1 меры ν относительно $\sum_i \frac{1}{2^n}\mu_{g_i}$ обладает свойством $AP(\mu|\nu-\nu_1)=\emptyset$. Поэтому

$$AP(\mu|\nu) = AP(\mu|\nu_1) \subset AP(\mu|\sum_i \frac{1}{2^n}\mu_{g_i}) = \bigcup_i g_i AP(\mu). \quad \blacksquare$$

Укажем разложение меры ν относительно меры μ при условии что $A(\mu|\nu) \neq \emptyset$. (Отметим, что если $E(\mu|\nu) \neq \emptyset$ или $I(\mu|\nu) \neq \emptyset$, то подобные разложения, очевидно, тривиальны.)

Теорема 4.2. *Если $A(\mu|\nu) \neq \emptyset$, то меру ν можно представить в виде*

$$\nu = \nu_1 + \nu_2, \quad \textit{где } \nu_1 \perp \nu_2, A(\mu|\nu) = A(\mu|\nu_1), A(\mu|\nu_2) = \emptyset, \qquad (i)$$

(но $AP(\mu|\nu_2)$, вообще говоря, не пусто) и существует последовательность $g_m \in A(\mu|\nu)$ такая, что

$$\nu_1 = \mathrm{T}_\gamma(\nu), \quad \textit{где } \gamma = \sum \frac{1}{2^m}|\mu_{g_m}| \ \ (\textit{в частности, } \nu_1 \sim \gamma).$$

Это разложение минимально в том смысле, что если $\nu = \nu_1^1 + \nu_2^1$ — разложение вида (i), то $\nu_1 = \mathrm{T}_{\nu_1}(\nu_1^1)$ (т.е. $\nu_1^1 = \nu_1 + \alpha$, где α взаимно сингулярно с ν_1 и является ограничением меры ν на некоторое множество).

Доказательство. Обозначим через $a = \sup\{\|\mathrm{T}_\gamma(\nu)\|$, где $\gamma = \sum \frac{1}{2^m}|\mu_{g_m}|$, $g_m \in A(\mu|\nu)\}$. Так как мера ν конечна, то a конечно и достигается на некоторой последовательности $\{g_m\}$. Обозначим через $\nu_1 = \mathrm{T}_\gamma(\nu)$, $\nu_2 = \nu - \nu_1$ и покажем, что они искомые.

Из построения γ сразу следует, что $A(\mu|\nu_2) = \emptyset$, и если $g \in A(\mu|\nu)$, то $\mu_g \ll \gamma$, т.е. $g \in A(\mu|\gamma)$. Так как $\mu_{g_m} \ll \nu$, то $\mu_{g_m} \ll \nu_1$. Поэтому $\gamma \sim \nu_1$ и $A(\mu|\gamma) = A(\mu|\nu_1)$, т.е. $A(\mu|\nu) \subset A(\mu|\nu_1)$. Обратное включение очевидно.

Покажем минимальность. Если $\nu = \nu_1^1 + \nu_2^1$ — еще одно такое разложение, то обязательно $\mu_{g_m} \ll \nu_1^1$. Значит, $\nu_1 \ll \nu_1^1$ и $\nu_1 - \mathrm{T}_{\nu_1}(\nu_1^1) = 0$. $\blacksquare$

Следствие 4.4. *Если $A(\mu|\nu) = AP(\mu|\nu)$, то $\nu = \nu_1 + \nu_2$, где $\nu_1 \sim \sum \frac{1}{2^m}|\mu_{g_m}|$, $g_m \in A(\mu|\nu)$, $AP(\mu|\nu) = A(\mu|\nu_1)$ и $AP(\mu|\nu_2) = \emptyset$.*

Доказательство. Если $g \in AP(\mu|\nu_2)$, т.е. $\mu_g \not\perp \nu_2$, то $g \in AP(\mu|\nu) = A(\mu|\nu)$. Поэтому $\mu_g \ll \nu_1$. Значит, $\nu_2 \not\perp \nu_1$. Противоречие. $\blacksquare$

Если G — группа, то в случае, когда $A(\mu|\nu) \neq \emptyset$ и $A(\nu|\mu) \neq \emptyset$, все пары мер из μ, μ_1, ν, ν_1 являются d-эквивалентными, но возможны случаи, когда $(\mu_1)_g$ не эквивалентна ν_1 для любого $g \in G$.

5. Преобразования мер на прямых произведениях и проективных пределах

В этом разделе мы установим связь множеств $B(\mu|\nu)$ на прямых произведениях и проективных пределах с соответствующими множествами проекций мер.

В качестве очевидного следствия (2.4) получаем:

Предложение 5.1. *Пусть (G_i, X_i), $i = 1, \dots, n$ — (полу)группы преобразований, $g = (g_1, \dots, g_n) \in G$, $\mu = \mu_1 \times \dots \times \mu_n$, $\nu = \nu_1 \times \dots \times \nu_n$ и $B(\mu|\nu)$ — одно из множеств $I(\mu|\nu)$, $E(\mu|\nu)$, $A(\mu|\nu)$, $AP(\mu|\nu)$. Тогда:*

1) $g \in B(\mu|\nu) \Leftrightarrow g_i \in B(\mu_i|\nu_i)$, $i = 1, \dots, n$;

2) $g \in S(\mu|\nu) \Leftrightarrow \exists i_0 : \quad g_{i_0} \in S(\mu_{i_0}|\nu_{i_0})$.

Для бесконечного произведения ответ не столь прост и использует альтернативу Какутани [6, 1].

Теорема 5.1. *Пусть $\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \dots$, $\nu = \nu_1 \times \nu_2 \times \dots$ — бесконечные произведения вероятностных мер и $g = (g_1, g_2, \dots) \in G_0$. Тогда:*

1. *$g \in I(\mu|\nu) \Leftrightarrow g_i \in I(\mu_i|\nu_i)$, $i = 1, 2, \dots$;*
2. *$g \in B(\mu|\nu)$, где $B(\mu|\nu)$ есть одно из множеств $E(\mu|\nu)$, $A(\mu|\nu)$, $AP(\mu|\nu)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*
   1) *$g_i \in B(\mu_i|\nu_i)$;*
   2) *произведение $\prod_{i=1}^{\infty} \int_{X_i} \left(\frac{d(\mu_i)_{g_i}}{d\nu_i} \right)^{\alpha} d\nu_i$ сходится при некотором $\alpha \in (0;1)$;*
3. *$g \in S(\mu|\nu)$ если и только если нарушается одно из условий п. 2 для множества $AP(\mu|\nu)$.*

Доказательство. Если $E = X_1 \times \dots \times X_{k-1} \times E_k \times X_{k+1} \times \dots, E_k \in \mathcal{B}_k$, то $\mu_g(E) = (\mu_k)_{g_k}(E_k)$ и $\nu(E) = \nu_k(E_k)$. Отсюда вытекает первая часть теоремы и необходимость условия 1) во второй части.

Если $g \in E(\mu|\nu)$ или $g \in A(\mu|\nu)$, то необходимость и достаточность условий 1) и 2) представляют собой содержание альтернативы Какутани [6, 1].

■

Рассмотрим общий случай счетного проективного предела. Прямым следствием теоремы из [1] является следующая теорема:

Теорема 5.2. *Пусть (G, X) — проективный предел (G_i, X_i), $i \in \mathbb{N}$. Пусть μ и ν — вероятностные меры на X, $g = (g_1, g_2, \dots) \in G$, μ_i и ν_i — проекции μ и ν на X_i. Тогда:*

1. *$g \in AP(\mu|\nu)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

   1) *$g_i \in AP(\mu_i|\nu_i)$;*

   2) *при некотором $\alpha \in (0;1)$ предел $\lim_{i\to\infty} \int_{X_i} \left(\frac{d(\mu_i)_{g_i}}{d\nu_i}\right)^\alpha d\nu_i > 0$.*

2. *$g \in A(\mu|\nu)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

   1) *$g_i \in A(\mu_i|\nu_i)$;*

   2) *$\int_{X_i} \left(\frac{d(\mu_i)_{g_i}}{d\nu_i}\right)^\alpha d\nu_i \to 1$ равномерно при $\alpha \to 1$.*

3. *$g \in E(\mu|\nu)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

   1) *$g_i \in E(\mu_i|\nu_i)$;*

   2) *$\int_{X_i} \left(\frac{d(\mu_i)_{g_i}}{d\nu_i}\right)^\alpha d\nu_i \to 1$ равномерно при $\alpha \to 1$ и при $\alpha \to 0$.*

4. *$g \in I(\mu|\nu)$ тогда и только тогда, когда $g_i \in I(\mu_i|\nu_i)$.*

5. *$g \in S(\mu|\nu)$, если и только если нарушается одно из условий пункта 1.*

■

6. Отображения групп преобразований

В этом разделе (G, X) — топологическая полугруппа преобразований, а все меры являются регулярными борелевскими. В данном разделе нам понадобится более слабое, чем L-подпространство, понятие.

Определение 6.1. *Пусть $N \subset M(X)$. Будем говорить, что N обладает L-свойством, если для любых $\mu \in N$ и $\nu \in M(X)$ таких, что $\nu \ll \mu$, существует $\gamma \in N$ такое, что $\gamma \ll \nu$.*

Определение 6.2. *Множество $N \subset M(X)$ назовем G-инвариантным, если $\mu_g \in N$ для любых $g \in G$ и $\mu \in N$.*

Определение 6.3. *Пусть $N \subset M(X)$. Локальным носителем N назовем множество тех $x \in X$, что для любой окрестности U точки x, существует мера $\mu \in N$, которая сосредоточена в U (т.е. $|\mu|(X \setminus U) = 0$). Локальный носитель N обозначим через $lsupp(N)$.*

Очевидно, что $lsupp(N)$ замкнут.

Предложение 6.1. *Пусть $N \subset M(X)$ обладает L-свойством и (p, τ) — морфизм (полу)групп преобразований (G, X) и (H, Y). Тогда:*

1. *$\tau(N)$ обладает L-свойством.*
2. *$\cup_{\mu \in N} supp(\mu) \subset lsupp(N)$.*
3. *$Cl(\tau(lsupp(N))) = lsupp(\tau(N))$.*
4. *Если N является G-инвариантным, то $lsupp(N)$ также G-инвариантен.*

Доказательство. **1.** Пусть $\gamma \ll \tau(\mu)$. Тогда для некоторой функции $f \in L^1(\tau(\mu))$ и теореме о замене переменных имеем

$$\gamma(E') = \int\limits_{E'} f(y) d\tau(\mu)(y) = \int\limits_{\tau^{-1}(E')} f(\tau(x)) d\mu(x)$$

и $f(\tau(x)) \in L^1(\mu)$. Значит, существует $\nu \in N$ такое, что $\nu \ll f(\tau)\mu$. Тогда $\tau(\nu) \ll \gamma$. В частности, если N является L-пространством, то и $\tau(N)$ является L-пространством.

2. Пусть $x \in supp(\mu)$ и U — окрестность x. Тогда $\mu|_U \neq 0$. Значит, существует $\gamma \in N$ такое, что $\gamma \ll \mu|_U$ и γ сосредоточена в U. Следовательно, $x \in lsupp(N)$.

3. Пусть $y_0 \in \tau(lsupp(N))$. Тогда для любой окрестности $U(y_0)$ существует $\mu \in N$ такая, что μ сосредоточена в $\tau^{-1}(U(y_0))$. Значит, $\tau(\mu)$ сосредоточена в $U(y_0)$ и $y_0 \in lsupp(\tau(N))$. Так как локальный носитель замкнут, то $Cl(\tau(lsupp(N))) \subset lsupp(\tau(N))$.

Обратно. Пусть $y_0 \in lsupp(\tau(N))$. Тогда для любой окрестности $U(y_0)$ существует мера $\nu = \tau(\mu)$ такая, что $supp(\nu) \subset U(y_0)$. Из пункта 2 следует, что существует $x \in lsupp(N) \cap \tau^{-1}(U(y_0))$. Следовательно, $\tau(x) \in U(y_0)$ и $y_0 \in Cl(\tau(lsupp(N)))$.

4. Пусть $x \in lsupp(N)$, $g \in G$ и V — окрестность точки $g \cdot x$. Пусть U — такая окрестность x, что $g \cdot U \subset V$ и мера $\mu \in N$ сосредоточена в U. Тогда $\mu_g \in N$ и сосредоточена в $g \cdot U \in V$. Значит, $g \cdot x \in lsupp(N)$. Предложение доказано. ■

Замечание 6.1. Отметим, что включение в п. 2, вообще говоря, строгое: для $X = G = \mathbb{R}$ и $N = \{\delta_r\}_{r \in \mathbb{Q}}$ очевидно, что $lsupp(N) = \mathbb{R}$, а $\cup_{\mu \in N} supp(\mu) = \mathbb{Q}$.

Кроме того, из выполнения равенства в 2 не следует, что N обладает L-свойством. Пусть $N = L^1(\mathbb{R}) + \{\alpha\mu\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, μ взаимно сингулярна с $m_{\mathbb{R}}$

и $\mu^{*2} \ll m_{\mathbb{R}}$. Тогда N — подалгебра в $M(\mathbb{R})$, для которой $lsupp(N) = \mathbb{R} = \cup_{\nu\in N} supp(\nu)$. Однако N, очевидно, не обладает L-свойством.

В следующей теореме мы свяжем условие согласованности с включениями множеств $B(\mu|\nu)$.

Теорема 6.1. *Пусть (p,τ) — морфизм из (G,X) в (H,Y) и $N \subset M(X)$ обладает L-свойством. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. $\tau(g\cdot x) = p(g)\cdot\tau(x)\,, \quad \forall x \in lsupp(N), \forall g \in G.$
2. $\tau(\mu_g) = (\tau(\mu))_{p(g)}\,, \quad \forall \mu \in N, \forall g \in G.$

   При этом выполнены следующие утверждения:

3. $p(B(\mu|\nu)) \subset B(\tau(\mu)|\tau(\nu))\,, \quad \forall \mu,\nu \in N,$
   где $B(\mu|\nu)$ — одно из множеств $I(.), E(.), A(.)$ или $AP(.)$.
4. $p^{-1}(S(\tau(\mu)|\tau(\nu))) \subset S(\mu|\nu), \quad \forall \mu,\nu \in N.$
5. *Справедливы все включения пп. 3 и 4. В частности, $p(B(\mu)) \subset B(\tau(\mu))$ и $p^{-1}(S(\tau(\mu))) \subset S(\mu)$.*

Кроме того, если N является G-инвариантным, то все утверждения 1–5 эквивалентны.

Доказательство. **1.⇒ 2.** Пусть $E \in \mathcal{B}_Y$. Так как $\tau(\mu_g)(E) = \mu(g^{-1}(\tau^{-1}(E)))$ и $(\tau(\mu))_{p(g)}(E) = \mu(\tau^{-1}(p(g)^{-1}(E)))$, то, согласно предложению 6.1 (2), достаточно показать равенство множеств $g^{-1}(\tau^{-1}(E)) \cap lsupp(N)$ и $\tau^{-1}(p(g)^{-1}(E)) \cap lsupp(N)$, что вытекает из следующей выкладки:

$$z \in g^{-1}(\tau^{-1}(E)) \cap lsupp(N) \Leftrightarrow \tau(g\cdot z) \in E \text{ и } z \in lsupp(N)$$

$$\Leftrightarrow p(g)\cdot\tau(z) \in E \text{ и } z \in lsupp(N) \Leftrightarrow z \in \tau^{-1}(p(g)^{-1}(E)) \cap lsupp(N).$$

Пусть существуют $x_0 \in lsupp(N)$ и $g_0 \in G$, для которых $\tau(g_0\cdot U) \cap p(g_0)\cdot\tau(U) = \emptyset$ для некоторой окрестности U точки x_0. Пусть $\mu \in N$ сосредоточена в U. Тогда:

2.⇒ 1. Мера $\tau(\mu_{g_0})$ сосредоточена в $\tau(g_0\cdot U)$, а $(\tau(\mu))_{p(g_0)}$ — в $p(g_0)\cdot\tau(U)$. Поэтому $\tau(\mu_{g_0})$ и $(\tau(\mu))_{p(g_0)}$ — взаимно сингулярны. Противоречие.

3.⇒ 1. Если N — G-инвариантно, то положим $\nu = \mu_{g_0} \in N$. Тогда $g_0 \in I(\mu|\nu)$. Но $\tau(\nu) = \tau(\mu_{g_0})$ взаимно сингулярна с $(\tau(\mu))_{p(g_0)}$. Противоречие.

2.⇒ 5. Вытекает из сохранения отношений $\not\perp, \perp, \ll$ и $\sim$ при отображениях. Например, пусть $g \in AP(\mu|\nu)$ и $\mu_g \not\perp \nu$. Тогда $(\tau(\mu))_{p(g)} = \tau(\mu_g) \not\perp \tau(\nu)$. Значит, $p(g) \in AP(\tau(\mu)|\tau(\nu))$. Включение п. 4 следует из включений п. 3 и равенства $S(\mu|\nu) = G \setminus AP(\mu|\nu)$. Теорема доказана. ■

З а м е ч а н и е 6.2. Отметим, что из требований $p(B(\mu)) \subset B(\tau(\mu))$ не вытекает условия согласованности. Например, пусть $X = Y = \mathbb{Z}$, $G = Aut\mathbb{Z}$, $H = \{e\}$, $\tau = id$ и p вырождено. Тогда p и τ несогласованы, однако $p(B(\mu)) = H = B(\tau(\mu))$.

Ясно, что обратные включения в теореме 6.1, вообще говоря, неверны.

Предложение 6.2. *Пусть N является L-пространством и $h \in H \backslash p(G)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. $h \notin B(\tau(\mu)|\tau(\nu))\,, \quad \forall \mu, \nu \in N,$
   где B обозначает одно из множеств $AP(.)$, $A(.)$, $E(.)$, $I(.)$.

2. $h(\tau(N)) \cap \tau(N) = \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. **1.**$\Rightarrow$ **2.** Если $\gamma \in h(\tau(N)) \cap \tau(N)$, то существуют $\mu, \nu \in N$ такие, что $\gamma = (\tau(\mu))_h = \tau(\nu)$, т.е. $h \in I(\tau(\mu)|\tau(\nu))$. Противоречие.

2.$\Rightarrow$ **1.** Пусть $\mu_1, \mu_2 \in N$ такие, что $h \in AP(\tau(\mu_1)|\tau(\mu_2))$. Пусть γ_i — такая часть $\tau(\mu_i)$, что $(\gamma_1)_h \sim \gamma_2$. Так как $\tau(N)$ также является L-пространством, то $\gamma_i, (\gamma_1)_h \in \tau(N)$. Положим ν_1, $\nu_2 \in N$ такие, что $\tau(\nu_1) = \gamma_1$, $\tau(\nu_2) = (\gamma_1)_h$, тогда $h \in I(\tau(\nu_1)|\tau(\nu_2))$.

Если $(\tau(\mu))_h = \tau(\nu) = \gamma$ для $\mu, \nu \in N$, то $\gamma \in h(\tau(N)) \cap \tau(N)$. Дальше ясно. ∎

Следствие 6.1. *Если $N = M(X)$ (т.е. N достаточно большое), то условия 1 и 2 эквивалентны тому, что $h(\tau(X)) \cap \tau(X) = \emptyset$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для мер δ_x имеем $h(\delta_x) = (\delta_x)_h = \delta_{h \cdot x} \notin \tau(N)$ тогда и только тогда, когда $h \cdot x \notin \tau(X)$, т.е. $h(\tau(X)) \cap \tau(X) = \emptyset$. ∎

З а м е ч а н и е 6.3. Отметим, что из инъективности τ и условия согласованности вытекает инъективность p. Действительно, пусть $g \neq e_G$ такой, что $p(g) = e_H$. Выберем $x \in X$ такой, что $g \cdot x \neq x$. Тогда $\tau(g \cdot x) = p(g) \cdot \tau(x) = \tau(x)$ и τ не инъективно.

Применим теорему 6.1 для установления некоторых свойств множества допустимых сдвигов при свертке. Предварительно докажем лемму.

Лемма 6.1. *Пусть τ — измеримое отображение из $G \times X$ в X. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. $\tau(g, x) = g \cdot x$, $\forall (g, x) \in G \times X$.

2. $\tau(\alpha \times \mu) = \alpha * \mu$, $\forall \alpha \in M(G)$, $\forall \mu \in M(X)$.

Доказательство. **1.** $\Rightarrow$ **2.** Из теоремы Фубини следует

$$\tau(\alpha \times \mu)(E) = \int_G \mu\left(pr_X\left[\tau^{-1}(E) \cap \{g\} \times X\right]\right) d\alpha(g).$$

Так как $pr_X\left[\tau^{-1}(E) \cap \{g\} \times X\right] = g^{-1}E$, то

$$\tau(\alpha \times \mu)(E) = \int_G \mu(g^{-1}E) d\alpha(g) = (\alpha * \mu)(E).$$

2. $\Rightarrow$ **1.** Пусть $\alpha = \delta_g$, $\mu = \delta_x$. Тогда

$$(\delta_g * \delta_x)(E) = \int_G \delta_x(h^{-1}E) d\delta_g(h) = \delta_x(g^{-1}E),$$

т.е. $\delta_g * \delta_x = \delta_{g\cdot x}$. Поэтому

$$\tau(\delta_g \times \delta_x) = \tau(\delta_{(g,x)}) = \delta_{\tau(g,x)} = \delta_{g\cdot x} = \delta_g * \delta_x.$$

Так как g и x произвольны, то $\tau(g,x) = g \cdot x$. ■

Теорема 6.2. *Пусть $B(.)$ обозначает одно из множеств $AP(.)$, $A(.)$, $E(.)$, $I(.)$. Тогда:*

1. *$B(\alpha) \subset B(\alpha * \mu)$, $\forall \alpha \in M^+(G)$, $\forall \mu \in M^+(X)$.*
2. *Если G абелева и $\alpha \in M^+(G)$, $\mu \in M^+(X)$, то*

$$B(\alpha) \cdot B(\mu) \subset B(\alpha * \mu).$$

3. *Если $X = G$ — группа, то*

$$B_l(\alpha) \subset B_l(\alpha * \mu), \quad B_r(\alpha) \subset B_r(\alpha * \mu).$$

В частности, если $\mu = \check{\alpha}$, то $A_l(\alpha) \subset E_t(\alpha * \check{\alpha})$.

Доказательство. **1.** Определим действие G на $G \times X$ следующим образом:

$$g \cdot (h,x) := (gh,x)\,.$$

Положим $p = id_G$. Тогда

$$\tau(g \cdot (h,x)) = \tau(gh,x) = gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = p(g) \cdot \tau(h,x).$$

Значит, (p,τ) — морфизм из $(G, G\times X)$ в (G,X). Тогда, по теореме 6.1 и лемме 6.1, $p(B(\alpha\times\mu))\subset B(\alpha*\mu)$. Осталось доказать равенство $B(\alpha\times\mu)=B(\alpha)$.

Для $E=E_1\times E_2\in\mathcal{B}(G)\times\mathcal{B}(X)$ имеем

$$g^{-1}E=\{(h,x)\ :\ (gh,x)\in E_1\times E_2\}=g^{-1}E_1\times E_2.$$

Поэтому $(\alpha\times\mu)_g(E_1\times E_2)=\alpha_g(E_1)\cdot\mu(E_2)$. Так как мера на прямом произведении однозначно определяется на множествах вида $E_1\times E_2$, то $(\alpha\times\mu)_g=\alpha_g\times\mu$. Поэтому $B(\alpha\times\mu)=B(\alpha)$.

2. Пусть $(G\times G, G\times X)$ — прямое произведение (полу)групп преобразований. Положим $\tau(t,x)=t\cdot x$, $p(g,h)=gh$. Тогда

$$\tau\left((g,h)\cdot(t,x)\right)=gth\cdot x=gh\cdot(t\cdot x)=p(g,h)\cdot\tau(t,x),$$

т.е. (p,τ) — морфизм. Из предложения 5.1 следует, что $B(\alpha\times\mu)=B(\alpha)\times B(\mu)$. Согласно теореме 6.1 и лемме 6.1 мы получим

$$B(\alpha)\cdot B(\mu)=p(B(\alpha\times\mu))\subset B(\tau(\alpha\times\mu))=B(\alpha*\mu).$$

3. Первое включение следует из п. 1. Второе доказывается аналогично, задавая правое действие G на $G\times X$ и G на X:

$$g\cdot(h,x)=(h,xg^{-1}),\quad g\cdot x=xg^{-1},\quad p=id_G.$$

Последнее включение следует из теоремы 3.3. ■

Условие коммутативности, как показывает следующий пример, существенно.

П р и м е р 6.1. Пусть $X=G=SO_3$ и H_1 и H_2 — замкнутые подгруппы G, состоящие из матриц вида:

$$H_1=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\t&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}\right\},\ H_2=\left\{\begin{pmatrix}1&0&r\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, r\in\mathbb{R}\right\}.$$

Положим $\mu\sim m_{H_1}$, $\nu\sim m_{H_2}$. Тогда

$$\mu*\nu(H_1H_2)=\int\limits_G\nu(x^{-1}H_1H_2)d\mu(x)=\int\limits_{H_1}\nu(x^{-1}H_1H_2)d\mu(x)=1,$$

т.е. $\mu*\nu$ сосредоточена на H_1H_2. Для любого $h\in G$ имеем

$$(\mu*\nu)_h(H_1H_2)=\int\limits_{H_1}\nu(x^{-1}h^{-1}H_1H_2)d\mu(x).$$

Элементарные выкладки показывают, что если $h \in H_1$, то $H_2 \subset x^{-1}h^{-1}H_1H_2$ и $(\mu * \nu)_h \sim \mu * \nu$; если $h \notin H_1$, то пересечение $x^{-1}h^{-1}H_1H_2 \cap H_1$ состоит не более чем из одного элемента и $(\mu * \nu)_h \perp \mu * \nu$. Следовательно, $E_l(\mu * \nu) = H_1 = E_l(\mu)$.

Аналогично:

$$_h(\mu * \nu)(H_1H_2) = \int\limits_{H_1} \nu(x^{-1}H_1H_2h)d\mu(x) = \nu(H_1H_2h).$$

Прямые выкладки показывают, что если $h \notin H_2$, то пересечение H_1H_2h и H_2 состоит из одного элемента, а если $h \in H_2$, то $H_2 \subset H_1H_2h$. Поэтому

$$AP_l(\mu * \nu) = E_l(\mu * \nu) = E_l(\mu) = E_t(\mu) = H_1$$

и

$$AP_r(\mu * \nu) = E_r(\mu * \nu) = E_r(\nu) = E_t(\nu) = H_2.$$

Следовательно, $E_t(\mu * \nu) = \{e\}$.

Отметим, что для абелевой группы п. 2 теоремы 6.2 несколько иначе доказан в [8].

7. Размер множества допустимых сдвигов

Докажем аналог теоремы А.В. Скорохода.

Предложение 7.1. *Пусть G — польская локально-компактная группа и s обозначает одну из букв l, r, t. Тогда:*

1. *Если μ и ν абсолютно непрерывны, то $AP_s(\mu|\nu)$ открыто.*
2. *$m_G(AP_s(\mu|\nu)) > 0 \Leftrightarrow \mu \not\perp m_G$ и $\nu \not\perp m_G$.*
3. *Если $m_G(A_s(\mu|\nu)) > 0$, то $\mu \ll m_G$, $\nu \not\perp m_G$ и $A_s(\mu|\nu)$ замкнуто.*
4. *Если $m_G(A_l(\mu)) > 0$, то $\mu \ll m_G$ и для любого g такого, что $\mu(A_l(\mu)g) > 0$ носитель ограничения μ на $A_l(\mu)g$ является замкнутой полугруппой. Аналогичные утверждения справедливы и для $A_r(\mu)$, и $A_t(\mu)$.*

Доказательство. Будем считать меры μ и ν вероятностными.

1. Пусть $\mu = fm_G$ и $\nu = Fm_G$. Тогда

$$T_\nu(\mu_g)(E) = \int\limits_E f(g^{-1}x) \cdot 1_{\{F>0\}} dm_G(x), \quad T_\nu({}_g\mu)(E) = \int\limits_E f(xg) \cdot 1_{\{F>0\}} dm_G(x),$$

и требуемое следует из непрерывности сдвигов в $L^1(m_G)$ [4, теорема 20.4].

2. Докажем только для $s = l$. Пусть вероятностная мера m эквивалентна m_G. Если $\mu \perp m$, то $AP_l(\mu|\nu) = AP_l(\mu|\nu_1)$, где $\nu_1 \perp m$, $\nu - \nu_1 \ll m$. Поэтому можно считать, что и $\nu \perp m$. Во второй части будет доказано, что существует борелевская функция $\rho(g,x)$ такая, что для любого $g \in G$ и любого борелевского E мы имеем

$$\rho(g,x) = \frac{d\mu_g}{d\nu}(x),\ \nu - \text{п.в., и тогда } \int\limits_E \rho(g,x)d\nu(x) \le \mu_g(E).$$

Выберем борелевское множество E так, чтобы $\nu(E) = 1$, $m(E) = 0$. Тогда

$$\int\limits_G \left\{ \int\limits_E \rho(g,x)d\nu(x) \right\} dm(g) = \int\limits_{AP_l(\mu|\nu)} \|T_{\nu,g}(\mu)\| dm(g) > 0.$$

С другой стороны,

$$\mu * m(E) = \int m(g^{-1}E)d\mu(g) = 0.$$

Так как $\mu * m \sim m \sim m * \mu$, то

$$\int\limits_G \left\{ \int\limits_E \rho(g,x)d\nu(x) \right\} dm(g) \le \int\limits_G \mu(g^{-1}E)dm(g) = m * \mu(E) = 0.$$

Противоречие. Обратно. Пусть μ_1 и ν_1 — абсолютно непрерывные части мер μ и ν относительно m_G. Тогда $AP_l(\mu_1|\nu_1) \subset AP_l(\mu|\nu)$ и требуемое следует из п. 1.

3. Пусть $m_G(A_l(\mu|\nu)) > 0$. Положим $\mu = \mu_1 + \alpha$, где $\mu_1 \ll m_G$, $\alpha \perp m_G$. Очевидно, что $A_l(\mu|\nu) = A_l(\mu_1|\nu) \cap A_l(\alpha|\nu)$. Поэтому $m_G(A_l(\alpha|\nu)) > 0$. Из п. 2 следует, что $\alpha = 0$.

Замкнутость $A_l(\mu|\nu)$, так же, как и в п. 1, следует из непрерывности левых сдвигов в $L^1(m_G)$ [4, теорема 20.4]. Повторим соответствующее место в доказательстве следствия 1 в [5]. В этом случае функция $g \mapsto \mu(g^{-1}E)$ непрерывна для любого борелевского E. Поэтому $B_E = \{g \in G :\ \mu(g^{-1}E) = 0\}$ замкнуто. Пусть $N = \{E \in \mathcal{B}(G) : \nu(E) = 0\}$. Тогда $A_l(\mu|\nu) = \cap_{E \in N} B_E$ замкнуто.

4. Пусть $\mu(A_l(\mu)g) = {}_g\mu(A_l(\mu)) > 0$. Положим $\alpha := {}_g\mu|_{A_l(\mu)}$. Докажем, что

$$A_l(\mu) \subset A_l(\alpha).$$

Пусть $h \in A_l(\mu)$ и $\alpha(E) = 0$. Так как $hA_l(\mu) \subset A_l(\mu)$, то из $\alpha(E) = \mu((E \cap A_l(\mu)g) = 0$ следует, что $\mu((E \cap hA_l(\mu))g) = 0$. Так как $h \in A_l(\mu)$, то

$$\alpha_h(E) = {}_g\mu(h^{-1}E \cap A_l(\mu)) = \mu_h((E \cap hA_l(\mu))g) = 0.$$

Следовательно, $h \in A_l(\alpha)$.

Так как α сосредоточена на $A_l(\mu)$ и, по п. 3, $A_l(\alpha)$ замкнуто, то $supp\alpha \subset A_l(\alpha)$. Пусть $x, y \in supp\alpha$. Если $xy \notin supp\alpha$, то существует окрестность U точки y такая, что $\alpha(xU) = 0 = \alpha_{x^{-1}}(U)$. Так как $\alpha_x \ll \alpha$, то $\alpha \ll \alpha_{x^{-1}}$. Поэтому $\alpha(U) = 0$. Но это противоречит выбору y. Предложение доказано. ■

Отметим, что именно п. 4 является обобщением результата А.В. Скорохода [2], т.к. содержит информацию о носителе.

В следующем предложении мы рассмотрим "размер" $E_l(\mu)$ относительно μ (ср. с теоремой 1 из [8]).

Предложение 7.2. *Пусть G — стандартная группа. Тогда:*

1. *Либо $\mu(E_l(\mu)g) \equiv 0$, либо $E_l(\mu)$ допускает локально-компактную топологию и для любого $g \in G$ такого, что $\mu(E_l(\mu)g) > 0$, ограничение ${}_g\mu = \mu * \delta_g$ на $E_l(\mu)$ эквивалентно мере Хаара на $E_l(\mu)$.*

2. *Либо $\mu(g^{-1}E_r(\mu)) \equiv 0$, либо $E_r(\mu)$ допускает локально-компактную топологию и для любого $g \in G$ такого, что $\mu(g^{-1}E_r(\mu)) > 0$, ограничение $\mu_g = \delta_g * \mu$ на $E_r(\mu)$ эквивалентно мере Хаара на $E_r(\mu)$.*

Доказательство. **1.** Пусть $\mu(E_l(\mu)g) = {}_g\mu(E_l(\mu)) > 0$. По теореме 3.3, $E_l({}_g\mu) = E_l(\mu)$. Так как ограничение ${}_g\mu$ на $E_l(\mu)$ является левоквазиинвариантным, то требуемое следует из теоремы Mackey–Weil [7]. **2.** Доказывается аналогично. ■

Замечание 7.1. Доказанные предложения хорошо иллюстрирует мера μ на плоскости, сосредоточенная на двух параллельных оси Ox прямых, на которых она эквивалентна мере Лебега.

References

[1] *S.S. Gabriyelyan*, On absolutely continuity and singularity of probability measures. — *Ukr. Mat. Zh.* (2005). (Russian) (To be published)

[2] *A.V. Skorohod*, On admissible translations of measures in Hilbert space. — *Theory Probab. Appl.* **15** (1970), No. 4, 577–598.

[3] *A.V. Skorohod*, Integration in Hilbert space. Nauka, Moscow, 1975. (Russian)

[4] *E. Hewitt and K. Ross*, Abstract harmonic analysis. V. 1. Academic Press, New York, 1963.

[5] *P.L. Brockett*, Admissible transformations of measures. — *Semigroup Forum* **12** (1976), 21–33.

[6] *S. Kakutani*, On equivalence of infinite product measures. — *Ann. Math.* **49** (1948), 214–224.

[7] *G.W. Mackey*, Borel structure in groups and their duals. — *Trans. Amer. Math. Soc.* **85** (1957), 134–165.

[8] *Y. Okazaki*, Admissible translates of measures on a topological group. — *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.* **A34** (1980), 79–88.

[9] *T.S. Pitcher*, The admissible mean values of stochastic process. — *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** (1980), 538–546.

Admissible transformations of measures

S.S. Gabriyelyan

Kharkov National Technic University "KPI"
21 Frunze Str., Kharkov, 61002, Ukraine
E-mail:gabrss@kpi.kharkov.ua

Received September 2, 2004

Let a topological semigroup G acts on a topological space X. A transformation $g \in G$ is called an admissible (partially admissible, singular, equivalent, invariant) transform for μ relative to ν if $\mu_g \ll \nu$ (accordingly: $\mu_g \not\perp \nu$, $\mu_g \perp \nu$, $\mu_g \sim \nu$, $\mu_g = c \cdot \nu$), where $\mu_g(E) := \mu(g^{-1}E)$. We denote its collection by $A(\mu|\nu)$ (accordingly: $AP(\mu|\nu)$, $S(\mu|\nu)$, $E(\mu|\nu)$, $I(\mu|\nu)$). The algebraic and the measure theoretical properties of these sets are studied. It is done the Lebesgue-type decomposition. If $G = X$ is a locally compact group, we give some informations about the measure theoretical size of $A(\mu)$.

Mathematics Subject Classification 2000: 28C99, 37A99.

Key words: topological G-space, measure, admissible transformation, Lebesgue-type decomposition.