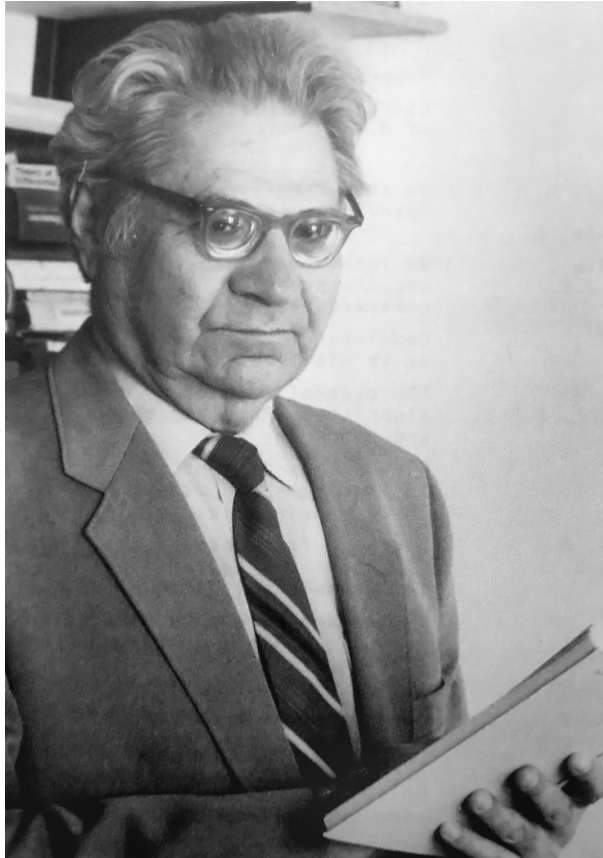


Михаил Самуилович Лившиц

1917–2007

(к столетию со дня рождения)



В этом году 4 июля исполнилось 100 лет со дня рождения выдающегося математика, чудесного человека Михаила Самуиловича Лившица. Его неординарность, удивительная глубина и простота привлекали и радовали всех тех, с кем ему приходилось общаться. Ниже мы приводим воспоминания коллег и учеников о М.С. Лившице: практически все воспоминания были представлены В.Э. Кацнельсоном (Израиль), их планировалось издать к 95-летию М.С. Лившица, но по разным причинам этого не произошло.

В.А. Марченко: Каким я помню Михаила Самуиловича Лившица. Я познакомился с Михаилом Самуиловичем в 1948 году в гостях у Н.И. Ахиезера. М.С. был молчалив и задумчив, казалось, он был сосредоточен на чем-то своем, не имевшем отношения к общему разговору. Когда я рассказал ему о недавно доказанных теоремах единственности для уравнения Штурма–Лиувилля, он заметил, что в квантовой механике есть другая обратная задача для уравнения Шредингера с убывающим потенциалом, единственность решения которой недавно доказал Левинсон, но только для случая, когда нет дискретного спектра. Я всегда с благодарностью вспоминаю это мимолетное замечание М.С., открывшего для меня новую, в то время мало изученную область.

Второй раз мы встретились в Одессе в 1952 году. Запомнился забавный эпизод, в котором ярко проявился характер М.С. Узнав, что я впервые вижу море, он предложил прогуляться по морю на лодке. Так мы и сделали. Отплыв от берега, М.С. решил немного поплавать и прыгнул в воду. Проплыв метров 10, он вернулся и, влезая в лодку, спокойно заметил, что вода прохладная. День был жаркий, и я последовал его примеру. Вода так обожгла меня холодом, что я немедленно с воплем вернулся в лодку. На берегу мы узнали, что температура воды была 13°C . Поразительно, с каким спокойствием М.С. перенес эту обжигающую температуру. Много позже, рассказывая об этом, М.С. поменял наши роли: оказывается, это я первым мужественно плавал вокруг лодки. Такая “забывчивость” не случайна — М.С. не любил выставлять людей в смешном виде.

Михаилу Самуиловичу было свойственно философское отношение и к жизни, и к науке. Математические понятия, конструкции и теоремы он связывал с различными явлениями и процессами, происходящими в природе, прежде всего в физике. Введя в 1946 году характеристическую функцию (х. ф.) несамосопряженного оператора, ставшую одним из основных понятий спектральной теории, он связал ее с теорией открытых систем, теорией рассеяния и теорией случайных процессов. Впоследствии он искал для нее приложения в геометрии и для описания ДНК. Такая неординарная точка зрения оказала большое влияние на коллег и учеников М.С. и способствовала всестороннему изучению характеристических функций. В результате были получены теоремы о факторизации х. ф. (В.П. Потапов), позволившие М.С. построить треугольные модели несамосопряженных операторов, теоремы подобия (Л.А. Сахнович) и развита теория пассивных систем (Д.З. Аров). Сегодня спектральная теория несамосопряженных операторов обрела законченные формы, вобрав в себя теорию х. ф. М.С. Лившица, теорию дилатаций Б.С. Надя–Ч. Фояша, теорему А. Берлинга и теорию рассеяния П. Лакса–Р. Филлипса. Первой из этих работ была статья М.С. Михаил Самуилович щедро делился идеями с коллегами и учениками. Переехав в Харьков, он

организовал в Университете семинар, сразу привлечший новых учеников и единомышленников. Некоторое время на квартире М.С. собирался еще один “кулуарный” семинар. Здесь круг обсуждавшихся вопросов был очень широк, иногда тематика переходила в область живописи и литературы. На этом семинаре я впервые услышал от М.С. знаменитое стихотворение Б. Пастернака:

*“Быть знаменитым некрасиво,
Не это поднимает ввысь . . .”*

Эти слова очень точно отражают жизненную позицию самого М.С.

Э. Цекановский: Мой учитель Мойше Лившиц. Мой дорогой учитель, Михаил Самуилович (Мойше) Лившиц, замечательный человек и выдающийся математик, скончался десять лет назад в возрасте почти 90 лет. Я ему очень благодарен не только за то, что он научил меня, как заниматься математикой, но и за то, что он систематически учил меня, как быть человеком. Его жизнь и замечательные научные достижения, вместе с его высокими моральными качествами, оказали на меня огромное влияние. Когда такие люди уходят от нас, душу заполняет ощущение пустоты.

Я впервые встретился с Михаилом Самуиловичем (М.С.) в 1957 году, когда был студентом кафедры математики Одесского педагогического университета. В то время в Одессе проходила студенческая конференция, и кафедра порекомендовала мне представить научную работу на эту конференцию. М.С. отвечал за математическую секцию конференции, и там я с ним познакомился.

Моя вторая встреча с М.С. произошла летом 1959 года в Одессе. Я закончил с отличием Одесский педагогический университет и получил рекомендацию в аспирантуру. В течение почти всей моей студенческой жизни профессор Владимир Петрович Потапов, друг М.С., был деканом физико-математического факультета. Он всегда поддерживал меня и хотел, чтобы я стал аспирантом. Однако за пару месяцев до моего выпуска Владимир Петрович перешел в Одесский политехнический институт.

Я уже подготовил необходимые документы для подачи в политехнический институт, но летом 1959 года Владимир Петрович пригласил меня к себе на дачу на 12-й станции Большого Фонтана в Одессе. Когда я приехал, Владимир Петрович был в плохом настроении. Он сказал мне, что М.С. сейчас в Одессе в отпуске и что в Харьковском горном институте, где сейчас он работает, есть место в аспирантуре по математике. Потапов посоветовал мне навестить М.С. и сказал, что он рекомендует меня в аспирантуру к М.С.

Через пару дней я пришел к М.С. Он спросил меня, в чем проблема, и когда я объяснил ему, он с характерным для него жестом (указательный палец у переносицы очков) сказал: “Владимир Петрович Потапов убедитель-

но рекомендовал Вас. Я думаю, что Ваш случай будет почти безнадежным в Харькове, но мы попытаемся бороться. Пожалуйста, пошлите Ваши документы в Горный институт в Харькове”. Я сделал то, что порекомендовал М.С., и начал работать учителем математики в школе в сельской местности в Бессарабии; там электричество от генератора грузовика было по вечерам всего пару часов (следует отметить, что после выпуска каждый в СССР должен был отработать по распределению).

Трудности начались, когда из Харьковского горного института пришло на мой одесский адрес 30 сентября письмо с приглашением в Харьков на вступительные экзамены на 1 октября. Это было практически невозможно, и я смог приехать в Харьков только 4 октября. Сотрудник приемной комиссии сказал мне, что я опоздал и что другие абитуриенты уже сдали первый экзамен по истории Коммунистической партии, и нужно ехать обратно. После того, как я показал конверт с датой получения, этот сотрудник сказал мне, что единственное, что я могу сделать, это прийти на следующий день рано утром (без подготовки и необходимых консультаций) на вступительный экзамен по иностранному языку. М.С. не было в это время в Харькове (он был на конференции по функциональному анализу в Баку), и я не мог обсудить ситуацию с ним. Я сдал 3 экзамена (математику на 5, иностранный язык на 5 и историю Коммунистической партии на 4). То, что я получил четверку на экзамене по истории было чудом, и это чудо произошло только благодаря А.Г. Руткасу и его помощи (он сейчас преподает в Харьковском национальном университете, и он и я впоследствии стали аспирантами М.С.)

Несмотря на то что я уже имел публикации, различные студенческие научные награды от Министерства образования Украины и лучшие оценки по специальности на вступительном экзамене, в аспирантуру меня не приняли. Администрация просто боялась показать меня отделу по науке харьковского обкома партии (что было обязательно в то время). Однако М.С. бесстрашно боролся за меня, даже когда больше никто не верил в возможность успеха, и в конце концов убедил ректора института проф. Д.С. Емельянова (недавно его реабилитировали, после того как он просидел несколько лет в лагерях), что меня можно принять в аспирантуру.

Я уже купил билет обратно домой, когда Д.С. Емельянов пригласил меня в свой кабинет, опустил глаза и сказал: “Я знаю, что Вы вполне заслуживаете поступления в аспирантуру, но я не могу этого сейчас сделать. Но я попытаюсь помочь Вам. Пожалуйста, оставайтесь в Харькове еще на неделю. Я пошлю проректора в Министерство образования в Киев с просьбой о выделении для Вас дополнительного места в аспирантуре”. И это место было выделено! Эта история показывает высокие моральные устои и мужество М.С. и Д.С. Емельянова, несмотря на огромное давление, которое оказывалось на них.

Когда М.С. окончательно решил переехать из СССР в Израиль, он решил не делать это из Харькова и обменять квартиру в Харькове на Тбилиси, хотя у него не было работы в Тбилиси. Когда он и его семья приехали в Тбилиси, об этом моментально узнали математики Грузии. Профессор И.Н. Векуа, член Академии наук СССР и директор Института прикладной математики Грузинской академии наук в Тбилиси, встретился с М.С. Насколько я знаю, приблизительно через пару недель после этой встречи некоторые грузинские математики обратились к М.С. и сказали, что если он дает слово не переезжать из Тбилиси в Израиль в течение по крайней мере трех лет, то ему дадут должность в Институте прикладной математики АН Грузинской ССР, и специально для него в институте будет создана соответствующая лаборатория. Он не дал своего слова, и тогда ему предложили должность профессора на кафедре математики Грузинского сельскохозяйственного института.

Я дважды навещал М.С. в Тбилиси. Мой последний визит был за два месяца до того, как он наконец оставил Грузию. Мы провели пару недель вместе, упаковывая его багаж в большие ящики для отправки в Израиль. В этот период шли летние экзамены в Сельскохозяйственном институте, и я был свидетелем потрясающей овации и знаков любви, которые студенты оказали ему в последний день экзаменов, желая ему всего наилучшего в новой жизни. Все это было невозможно в то время в любом другом месте бывшего СССР, но такова Грузия. Гордые грузинские студенты и математическое сообщество оказались Людьми с большой буквы.

Научный вклад М.С. в анализ (обобщенная проблема моментов, обобщенная формула обращения Стилтеса, направленные функционалы), теорию операторов (характеристические функции, треугольные модели, критерий полноты, бесконечномерные аналоги теории Жордана), математическую физику (связь между характеристической функцией и S -матрицей Гейзенберга в квантовой теории рассеяния), теорию систем (теория открытых физических систем, в частности, синтез электрических цепей) важен и фундаментален. Его новаторские работы и открытия оказали большое влияние на несколько поколений математиков.

В 1937 году профессор Марк Крейн читал спецкурс по теории операторов в Одесском университете. В то время спектральный анализ самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах только начинал развиваться, и тем более было мало известно о несамосопряженных операторах. Марк Крейн сказал своим студентам, что еще не родился человек, который что-нибудь сказал бы о бесконечномерном аналоге жордановой теории. Он был бы в этом прав, если бы М.С. Лившиц не был студентом этого курса.

В 1945 году М.С. защитил диссертацию на соискание степени доктора физико-математических наук, посвященной многомерной проблеме моментов. Защита проходила в Москве, в Математическом институте имени Стек-

лова, оппонентами были Стефан Банах, Израиль Гельфанд и Абрам Плеснер.

В том году М.С. сделал первые фундаментальные шаги в теории несамосопряженных операторов, введя унитарный инвариант несамосопряженного оператора — характеристическую функцию. В 1954 году он опубликовал классическую статью о спектральном разложении ограниченных несамосопряженных операторов, которая стала отправным пунктом бесконечномерной версии теории Жордана. В этой статье он доказал бесконечномерный аналог классической теоремы Шура, согласно которой любая матрица унитарно эквивалентна треугольной матрице. В качестве побочного продукта треугольной модели Лившица возник замечательный критерий полноты собственных векторов и ассоциированных векторов ограниченных диссипативных линейных операторов с ядерной мнимой частью. Треугольная модель Лившица также использовалась для нахождения условий, при которых собственные и ассоциированные векторы ограниченного линейного оператора образуют базис Рисса. Еще одним значительным следствием треугольной модели стала теорема Лившица о том, что любой вполне несамосопряженный вольтерров оператор с одномерной мнимой частью унитарно эквивалентен оператору, $(Jf)(x) = i \int_x^l f(t)dt$ в $L_2([0, l]; dx)$. Как оказалось, этот оператор является бесконечномерным аналогом матрицы с одной жордановой клеткой.

Мать Тереза однажды представила простой план жизни: “Если вы успешны, у вас будут ложные друзья и настоящие враги. Все равно стремитесь к успеху. Если вы честны и откровенны, вас могут обмануть. Все равно будьте честны и откровенны. Добро, которое вы совершаете сегодня, завтра может быть забыто. Все равно творите добро. Отдайте миру все, что можете, все равно этого может быть мало. Все равно отдавайте все миру. Всегда идите вперед . . . несмотря ни на что”.

Этот простой план был полностью выполнен в замечательной жизни М.С. Лившица. Для меня большая честь и удача, что я был его учеником и коллегой. Любовь и восхищение Мойше всегда будут в моем сердце.

Благодарность. Я очень благодарен Фрицу Гештези и Константину Маркарову за ценные замечания, обсуждение и помощь.

В.К. Дубовой: О моем учителе. На протяжении своей жизни я часто вспоминаю о моментах, связанных с Михаилом Самуиловичем. Жизнь уносит эти моменты все дальше и дальше в прошлое, стирая детали, но не тускнеют те яркие эмоциональные впечатления, которые с ними связаны. Именно на этих впечатлениях я и хочу остановиться, понимая, что они носят личный характер.

Впервые я увидел Михаила Самуиловича в феврале 1966 года. Я был студентом III курса механико-математического факультета Харьковского университета, а Михаил Самуилович начал читать группе, в которой я учил-

ся, курс “Интегральные уравнения”. Это был период, когда на факультете работал один из сильнейших составов (если не самый сильный) преподавателей за всю историю его существования. Так, например, нам читали лекции Н.И. Ахиезер, А.В. Погорелов, Б.Я. Левин, В.А. Марченко, Ю.И. Любич, И.В. Островский, М.И. Кадец, Я.П. Бланк, В.М. Борок, Н.С. Ландкоф, Э.М. Жмудь, Г.Я. Любарский, М.Д. Дольберг. На факультете работало много научных семинаров и кружков. Фактически каждый профессор вел свой семинар, посещая при этом и другие семинары. Были многолетние семинары с устоявшейся тематикой, но были и семинары, цель которых была в разборе какой-либо книги или цикла статей. Эти семинары после выполнения своей цели переставали функционировать, но чаще всего трансформировались в другие семинары. Это был период, когда ведущей группе математиков удалось создать в Харькове удивительную научную атмосферу, которую усилила большая группа преподавателей и студентов, активно занимающаяся математикой.

Безусловно, у каждого лектора был свой индивидуальный стиль. На этом фоне лекции Михаила Самуиловича произвели на меня особое впечатление тем, что на них абсолютно отсутствовала попытка лектора сосредоточить хотя бы какое-либо внимание слушателей на себе. На лекциях Михаил Самуилович небыстро и бережно разворачивал ткань излагаемого предмета, при этом пластика его движений, голос, написание формул на доске способствовали концентрации внимания слушателей исключительно на излагаемом материале. Мне иногда казалось, что время возле Михаила Самуиловича замедляет свой ход (как кинокамера в фильмах А. Тарковского), давая возможность спокойно сосредоточиться на важных деталях и оставляя в стороне суету жизни. Меня заинтересовала не только тематика, которой занимался Михаил Самуилович, но завораживала и та атмосфера, которую он создавал вокруг себя.

В сентябре 1966 года (это было начало IV курса) я обратился к Михаилу Самуиловичу с просьбой быть моим научным руководителем. Побеседовав со мной, Михаил Самуилович выбрал день недели, и в этот день мы начали регулярно встречаться. Целью этих встреч было обсуждение того, что я успел сделать за неделю в направлении поставленной передо мной задачи. Так продолжалось в течение трех лет: IV, V курсы и I курс аспирантуры. За этот период времени фактически была завершена работа над моей кандидатской диссертацией, и уже после этого наши встречи стали носить менее регулярный характер. Эти три года стали для меня настоящей школой научной работы.

Важную роль сыграл и научный семинар, который вел Михаил Самуилович. Семинар проходил на кафедре математической физики. Это небольшая комната (приблизительно 12 кв. м), центральную часть которой занимал

большой письменный стол. Перед столом, в метре от него, висела большая доска во всю длину стены. Во время семинара Михаил Самуилович (если не был докладчиком) садился за этот письменный стол, а члены семинара (их было человек 10) рассаживались на стульях вокруг Михаила Самуиловича. Расстояние от докладчика до слушателей было небольшим, но и не было ощущения тесноты. Докладчик чувствовал каждого слушателя. Теплая и неофициальная обстановка порождала особую атмосферу. От докладчика Михаил Самуилович требовал максимальной четкости и проработки деталей. Известно, что нехватку аргументов аналитик часто пытается компенсировать эмоциональным движением рук. У Михаила Самуиловича это не проходило. За каждое слово нужно было отвечать. И это относилось не только к докладчику, но и к слушателям.

Мне повезло быть свидетелем того, как Михаил Самуилович внимательно и тщательно анализировал стоящую проблему, постепенно приближаясь к ее решению. Его особенно интересовали задачи, для решения которых необходимо было открывать новый математический язык. Поэтому многие его работы носят пионерский характер.

Во время разговора Михаил Самуилович внимательно слушал собеседника. Его очки увеличивали зрачки глаз и придавали его взгляду пронизательный характер. Некоторых это смущало, но мне всегда помогало внутренне собраться и сосредоточиться на главном. Если ситуация требовала, Михаил Самуилович мог и умел проявлять твердость. Это, в частности, отразилось и на отношении администрации университета к нему. Но в жизни Михаил Самуилович был мягким, внимательным человеком и никогда не стремился навязывать свое мнение. Это особенно проявлялось во время научных дискуссий. Я это почувствовал и во время сдачи кандидатского экзамена. Сдача экзамена предполагала прочтение 5 монографий. Когда я прочитывал очередную монографию, мы вместе обсуждали ее. Одна из таких бесед состоялась в мае. Был солнечный весенний день и Михаил Самуилович предложил провести разговор в парке, рядом с университетом. Мы медленно прогуливались по аллеям парка, спокойно анализируя те части монографии, которые Михаил Самуилович считал наиболее важными. Это был чудесный день. Гармония и красота обсуждаемой книги слилась с красотой пробудившейся весны. Два часа в парке пролетели так быстро, что я не почувствовал этого времени.

Было несколько курьезных ситуаций, из которых Михаил Самуилович помог мне деликатно выйти. Однажды я договорился с Михаилом Самуиловичем и Эммануилом Моисеевичем Жмудем обсудить некоторые мои результаты, связанные с теорией представлений групп. Перед беседой один из работников деканата задержал меня в коридоре, и я на несколько минут опоздал. Мне было неловко за опоздание, я разволновался и сначала обратился к Эммануилу Моисеевичу: “Михаил Самуилович, извините меня, пожалуйста-

ста, за опоздание”. На это Эммануил Моисеевич ответил: “Я — Эммануил Моисеевич, а Михаил Самуилович — вот напротив”. Тогда я повернулся к Михаилу Самуиловичу со словами: “И Вы, Эммануил Моисеевич, извините меня за опоздание”. Доброжелательный смех Михаила Самуиловича и Эммануила Моисеевича разрядил обстановку, и уже через несколько минут мы спокойно работали.

Второй случай произошел, когда я принес Михаилу Самуиловичу окончательный вариант двух глав в книгу, которая готовилась к печати. Это было после семинара, Михаил Самуилович был в хорошем настроении, а члены семинара еще не успели разойтись. Михаил Самуилович взял у меня рукопись со словами: “Сейчас посмотрим, что Вы принесли”. Он раскрыл рукопись наугад и в первом же утверждении, которое попало ему на глаза, оказалась досадная, существенная опечатка. Я не мог понять, как я мог ее пропустить. Рукопись перечитывалась мною много раз и обсуждалась с Михаилом Самуиловичем. У меня было желание куда-либо провалиться. Но Михаил Самуилович весело сказал: “В печать”. Я начал возражать, считая, что рукопись надо еще раз внимательно проработать. Улыбнувшись Михаил Самуилович ответил: “Я уверен, что опечаток больше нет”.

Моя последняя встреча с Михаилом Самуиловичем произошла в июне 2000 года. Я был в Израиле по приглашению института им. Вейцмана. Мы договорились встретиться в Беер-Шеве (где жил Михаил Самуилович) в математическом корпусе университета. Предварительно мы решили, что побеседуем в кабинете, а потом вместе пообедаем. Сначала мы обсуждали мои последние работы, и я рассказывал о своих планах. Затем после небольшого перерыва Михаил Самуилович рассказал о своих последних результатах. Несмотря на возраст, он очень живо и быстро на все реагировал и после почти трехчасовой беседы выглядел совершенно не уставшим. После обеда Михаил Самуилович предложил погулять по территории университета. Я с радостью согласился. Я очень ценил эти моменты, когда после обсуждения математических задач мы начинали разговаривать на самые разные темы. Иногда в таких разговорах Михаил Самуилович вспоминал некоторые моменты из своей жизни, как правило хорошие. Но однажды он рассказал и о трагическом эпизоде. Это было в 1936 году. Время повальных арестов в стране Советов. В один из вечеров отец Михаила Самуиловича пришел домой в очень хорошем настроении. Обняв сына, он сказал: “Скоро будет принята новая Конституция, и мы, Миша, наконец, заживем новой, достойной жизнью”. А ночью отца арестовали, и Михаил Самуилович его больше не видел.

Мы прогуливались по территории университета, и Михаил Самуилович рассказывал об одном художественном фильме, который произвел на него сильное впечатление. Я взглянул на часы. Было около 7 часов вечера. Я был потрясен тем, насколько потерял чувство времени. Восемь часов пролетело

как одно мгновение. Некоторое время мы спорили о том, кто кого будет провожать. Ведь я был гостем. Все же я настоял на том, что на такси провожу Михаила Самуиловича домой. Прощание перед домом, где жил Михаил Самуилович, было теплым и коротким. Я сел в такси и, когда оно тронулось, обернулся назад. Михаил Самуилович стоял у подъезда и мягким движением руки прощался со мною. Машина неумолимо и навсегда уносила меня от дорогого мне человека, который так много дал мне и общение с которым подарило мне радость напряженной, спокойной, творческой работы.

В.А. Золотарев: Мой учитель! В выборе моей научной тематики важную роль сыграл Л.Л. Ваксман. Начиная со 2-го курса мехмата Харьковского университета (1969 г.) именно Л.Л. Ваксман обратил мое внимание на теорию функций комплексного переменного, дифференциальную геометрию, функциональный анализ, теорию операторных алгебр и др. На третьем курсе Л.Л. Ваксман привел меня на спецкурс по теории несамосопряженных операторов и семинар, которые вел М.С. Лившиц. С этого момента и началось мое вхождение в проблематику теории несамосопряженных операторов. В этот период М.С. Лившица особенно интересовала задача модельной реализации систем несамосопряженных операторов. Так как простейшим примером систем операторов являются векторные поля (дифференциальные операторы первого порядка), то на семинаре М.С. Лившица реферировалась монография С. Хелгасона по дифференциальной геометрии (докладчик В.К. Дубовой). Одним из ключевых моментов теории несамосопряженных операторов является глубокая взаимосвязь между инвариантными подпространствами операторов и задачей факторизации на множители его характеристической функции. Поэтому возникла задача существования общего нетривиального инвариантного подпространства у коммутативной (например) системы несамосопряженных операторов. Так в 1970 г. М.С. Лившиц мне и моему однокурснику М. Хондо поставил задачу: показать, что у двух коммутирующих компактных операторов всегда существует общее нетривиальное инвариантное подпространство. М.С. Лившиц был убежден в позитивном решении этой проблемы. Нам не удалось найти полное решение этой задачи без дополнительных ограничений. В 1972 г. В.И. Ломоносовым была полностью решена эта проблема, основанная на принципе неподвижной точки. Меня тогда поразило дар предвидения и глубокая интуиция Михаила Самуиловича.

После окончания университета (1973 год) М.С. Лившиц предложил мне поступить к нему в аспирантуру по кафедре математической физики, которой тогда заведовал Н.И. Ахиезер. С этого периода начался мой этап активных взаимоотношений с Михаилом Самуиловичем. Каждую среду я докладывал М.С. Лившицу о проделанной работе. А началось с простой задачи. Дать внутреннее описание системы операторов $\{A_1, A_2\}$, которая унитарно экви-

валентна системе операторов интегрирований по независимым переменным в пространстве $L^2(\Omega)$, где Ω — прямоугольник в \mathbb{R}_+^2 . Ответ был вскоре найден, оказывается, что система операторов $\{A_1, A_2\}$ должна быть дважды перестановочной, $[A_1, A_2] = 0$, $[A_1^*, A_2] = 0$. Михаилом Самуиловичем тут же была опровергнута моя гипотеза, что этот результат со свойством дважды перестановочности годится и для других областей Ω из \mathbb{R}_+^2 . После этого начались наши совместные прогулки по парку Шевченко, где мы неоднократно обсуждали возможные решения этой задачи. Мне удалось показать, что если $[A_1, A_2] = 0$, а коммутатор $[A_1^*, A_2]$ нильпотентен ($[A_1^*, A_2]^2 = 0$), то область $\Omega \subset \mathbb{R}_+^2$ является прямоугольником, из которого выброшен прямоугольник меньшего размера, примыкающий к вершине исходного прямоугольника. Таким образом, было установлено, что алгебраические свойства системы операторов (степень нильпотентности коммутатора $[A_1^*, A_2]$) определяют геометрию (конфигурацию) области задания Ω функций модельного пространства.

Следует отметить, что М.С. Лившиц, как правило, не проверял доказательств. Я формулировал утверждение, и мы его долго обсуждали, затем гуляли по парку и говорили о музыке (Михаил Самуилович очень любил классическую музыку), о литературе, а затем я провожал его домой на улицу Инженерную (ныне Бакулина). И буквально перед прощанием он мне говорил, что мной доказано верно, а что — нет. Меня всегда это удивляло. Вероятно, ему было подвластно видение гармонии и глубины взаимоотношений математических понятий и фактов. Такое восприятие, как мне кажется, присуще лишь великим талантам и гениальным провидцам. Эта область функционального анализа и сейчас далека от завершения, так до сих пор остается открытой задача об описании свойств исходной системы операторов, если область Ω неодносвязна.

Надо сказать, что этот харьковский период жизни М.С. Лившица был для меня удивительной школой нестандартного подхода к математическим исследованиям. Знаменательно то, что все идеи и постановки задач М.С. Лившица, несмотря на кажущуюся простоту, не имели аналогов и не базировались на методах и ассоциациях из других областей анализа. Можно с уверенностью сказать, что Михаил Самуилович был глубоким и неординарным математиком-философом.

В 1975 г. М.С. Лившиц переезжает в г. Тбилиси, и мое общение с Михаилом Самуиловичем утратило регулярность, хотя и не стало менее плодотворным. Я дважды прилетал в Тбилиси и общался с моим учителем. Именно в тбилисский период своей научной деятельности М.С. Лившиц нашел подход к решению задачи о модельных представлениях коммутативных систем несамосопряженных ограниченных операторов. В основе метода лежит идея рассмотрения двух операторов $i(A_1A_2^* - A_2A_1^*)$ и $i(A_1^*A_2 - A_2^*A_1)$, которые, в некотором смысле, являются далеким отголоском коммутатора $[A_1^*, A_2]$. Суть

состоит в том, что эти операторы содержат в себе “внешнюю информацию” о коммутативности исходной системы операторов $\{A_1, A_2\}$ и позволяют в замкнутой форме (в духе Фробениуса) описать эволюцию двухпараметрических полугрупп $\exp\{i(t_1 A_1 + t_2 A_2)\}$. Эффективность этой идеи М.С. Лившица нашла свое плодотворное развитие и для алгебр Ли несамосопряженных операторов $\{A_k\}_1^n$. Оказалось, что для алгебр Ли спектральный анализ следует проводить на надлежащих группах Ли. Таким образом, и здесь ярко проявился пророческий дар Михаила Самуиловича. Он увидел в маленьких крупицах согласования аналитических объектов содержательную суть, присущую общему.

В 1997 году на 80-летнем юбилее (этому была посвящена конференция в Беер-Шеве, Израиль) я вновь имел счастье общения с М.С. Лившицем. Эти мои беседы с Михаилом Самуиловичем оставили неизгладимый след в моей памяти. Это — таинственный дух фантазии и неожиданных поворотов мысли.

Даже тогда, когда мы виделись с М.С. Лившицем в последний раз (2003 год, Беер-Шева, Израиль), мы вместо запланированных 1,5–2 часов проговорили целый день. Несмотря на возраст, Михаил Самуилович был активен, и все, что касалось математики, как всегда, обретало глубину и ясность.

Я горжусь, что являюсь одним из учеников М.С. Лившица. Не каждому дано открыть целое направление в науке, а Михаилу Самуиловичу это удалось. Его идеи и методы далеко не исчерпаны, так значительно они опередили время.